Untersuchung zur Auswirkung der Geschwindigkeit bei einem im Regen laufenden Menschen

Wettbewerb „Jugend forscht“ 2013

Trisha Schwertel (16)

Arbeitsgemeinschaft „Jugend forscht“
des Christian Gymnasium Hermannsburg
Leitung StD Thomas Biedermann

Inhaltsverzeichnis

1.Einleitung

Fast jeder kennt diese Situation: Man ist draußen, weit weg von irgendeiner Bedachung und es fängt ohne Vorwahnung an zu regnen. So ähnlich erging es mir eines Abends, als ich mit dem Fahrrad unterwegs war, weshalb ich auf die Fragestellung kam, ob es sinnvoll ist, schnell durchzufahren oder gemütlich zu radeln, um so wenig Wasser, wie möglich, aufzufangen. Wie viele würde ich mich für die erste Variante entscheiden. Aber wie entscheidend ist das Parameter Geschwindigkeit hinsichtlich dieser Problemstellung tatsächlich?! Ist langsames Fahren hilfreich oder bleiben wir nur am trockensten, wenn Lichtgeschwindigkeit erreicht wird? Oder gibt es eine optimale Geschwindigkeit, um dem Regen auszuweichen?

Diese Fragen werde ich aus mathematischer Sicht in dieser Arbeit beleuchten. Dazu wird der Radfahrer, durch einen sich nach vorne bewegenden Quader ersetzt, um die folgenden Situationen zu vereinfachen. Des Weiteren muss man Überlegungen anstellen, mit welchem Rechenverfahren man die aufgenommene Menge an Regen errechnen kann. Die Entscheidung fiel auf das Bestimmen der Volumina von den Flächen, die auf der vorbestimmten Strecke von 10 m, sich durch den Regen bewegen (siehe 2.2.Mathematische Grundlagen).

2.Grundlagen über Regen

2.1.Physikalische Grundlagen

2.1.1.Gleichförmige Bewegung

Weil die aufgenommene Regenmenge hinsichtlich der Geschwindigkeit berechnet wird, muss man wissen, um welche Bewegungen es sich bei der Simulation handelt. Zuerst haben wir den Regen, der sich in y-Richtung nach unten bewegt. Dies geschieht gleichförmig und nicht gleichmäßig beschleunigt, denn durch den Luftwiderstand wird der Tropfen so ausgebremst, dass er nicht weiter beschleunigen kann. Auch die Bewegung des Läufers ist gleichförmig, denn dieser hält seine Geschwindigkeit in der Simulation und muss am Anfang nicht erst beschleunigen, um eine gewisse Geschwindigkeit zu erreichen. Diese Tatsachen führen zu den folgenden Gesetzen:

$$s=v\cdot t+s_0 \quad v=\Delta s:\Delta t \quad a=0 \text{ [1]}$$

s ist die Strecke, die in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v und der Zeit t und einer bereits gegangenen Strecke s_0, als t=0 war, zurückgelgt wurde. Die Geschwindigkeit ergibt sich aus dem

Durchschnitt der Strecke und der Zeit, damit man weiß, wie viel Weg in einer vorgegebenen Zeit t zurückgelegt wurde. Die Beschleunigung a beträgt 0, denn die Geschwindigkeit ist konstant.

2.1.2.Berechnung der Tropfenmenge

Um die Tropfenmenge pro m³ in einer Sekunde zu berechnen, benötigt man Angaben bezüglich des Volumens eines einzelnen Tropfens und die durchschnittliche Niederschlagsmenge in l/m²h. Das Volumen eines Tropfens sei V_T. Laut [3], [4] kann man für ein durchschnittlichen Regentropfen ein Volumen von 0,03 bis 0,06 annehmen. Für das folgende Beispiel wähle ich als Größe 0,03ml

$$V_T = 0{,}03 \text{ ml}$$

Ein Regenschauer wird im Regelfall durch eine bestimmte Niederschlagsmenge pro Zeiteinheit, die ich mit M_R bezeichne. Für einen durchschnittlichen Regenschauer gilt z.B.

$$M_R = 1{,}2 \text{ l/m}^2\text{h}$$

Die Tropfenanzahl pro Fläche A und Zeiteinheit t bezeichne ich mit N_T. Somit erhält man

$$N_T = M_R / V_T \qquad (1)$$

Mit den oben angegebenen Werten ergibt sich

$$N_T = 1200 \text{ ml/m}^2\text{h} / 0{,}03 \text{ ml} = 40000 \text{ 1/m}^2\text{h}$$

Die Tropfenanzahl pro Strecke s und Zeiteinheit t sei R_T. Deshalb ergibt sich

$$R_T = \sqrt{N_T} \qquad (2)$$

Wenn man die Werte einsetzt, erhält man

$$R_T = \sqrt{40000 1/m^2 h} = 200 1/m\sqrt{h}$$

Die Tropfenanzahl pro Volumen V_R und Zeiteinheit t sei Q_T. Daraus folgt

$$Q_T = (R_T)^3 \qquad (3)$$

Setzt man wieder die Werte ein, so zeigt sich

$$Q_T = (200 \text{ l/mh}^{0,5})^3 = 8000000 \text{ 1/m}^3\text{h}^{1,5} = 8000000 \text{ 1/m}^3\text{h}$$

Die Tropfenanzahl pro Volumen V_R in der Zeit k in Sekunden, sei W_T. So gilt

$$W_T = Q_T / (k / t) \qquad (4)$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$W_T = 8000000\ 1/m^3/h\ /\ (3600\ s\ /\ 1h) = 2222{,}222\ 1/m^3/s$

In einer Formel zusammengefasst bedeutet das: $$c=\frac{\sqrt[3]{\left(\frac{M_R}{V_T}\right)}}{\frac{k}{t}}$$

2.1.3.Berechnung der Tropfengeschwindigkeit

Für das spätere Vorgehen ist die Tropfengeschwindigkeit von großer Bedeutung (siehe 3. Rechnerische Lösung), weshalb es notwendig ist diese mithilfe des Gesetzes von Stokes [2] zu errechnen. Es lautet:

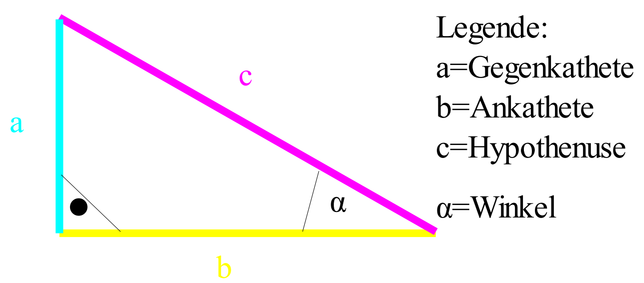
$$v=\sqrt{\frac{(8\cdot r\cdot g\cdot \rho_T)}{3\cdot c_w\cdot \rho_L}}$$

Als sinnvolle Geschwindigkeit für den Regen kann man 2-6 m/s angeben, wenn für den Radius eines Tropfens r = 0,0001m - 0,00035m, die Erdbeschleunigung g = 9,81 m/s², für die Dichte des Tropfens ρ_T = 990 kg/m³, für den Widrstandbeiwert c_w 0,35 bis 1,3 und für die Dichte der Luft ρ_L = 1,3 kg/m³ gilt.

2.2.Mathematische Grundlagen

2.2.1.Winkelfunktionen

Wer nicht zuerst die Tropfengeschwindigkeit berechnen möchte, kann auch mithilfe von verschiedenen Winkelfunktionen einzelne Seiten herleiten. Weil eine Grundseite vorhanden ist (in dem Fall die Laufstrecke), die aufgrund ihrer Parallelität zur Kante des gedachten Raumes einen rechten Winkel mit einer weiteren Grundseite bildet, ist das Arbeiten mit diesen Funktionen möglich. Ferner ist ein weiterer Winkel gegeben, der eine entscheidende Rolle spielt, denn dieser bestimmt die Geschwindigkeit der bewegten Figur und hilft somit weitere Seiten rechnerisch zu ermitteln. (aufgrund des Winkelsummensatzes ist der dritte Winkel ebenfalls gegeben).



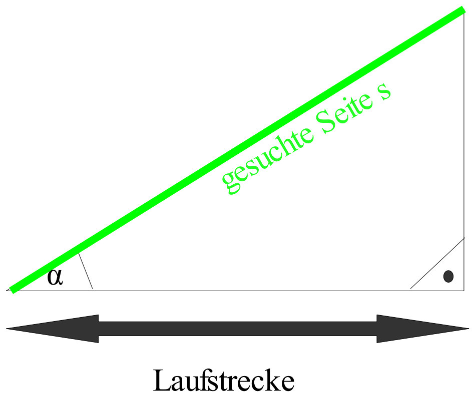
Zeichnung 1: Winkelfunktionen am Dreieck

Folgende Formeln gelten für das Berechnen der fehlenden Seite (siehe Zeichnung 1)

- sin α=Gegenkathete:Hypothenuse
- cos α=Ankathete:Hypothenuse
- tan α=Gegenkathete:Ankathete

Je nach dem welche Winkelfunktion benötigt wird, gibt die Sinusfunktion das Verhältnis von der Gegenkathete zur Hypothenuse, die Cosinusfunktion das Verhältnis von der Ankathete zur Hypothenuse bzw. das Verhältnis von der Gegenkathete zur Ankathete wir mit dem Tangens beschrieben. Alles natürlich in Abhängigkeit von den Innenwinkeln, bei denen ein Winkel immer exakt 90° entspricht, also einem rechten Winkel.

Nachteil dieser Methode ist, dass die Geschwindigkeit durch den jeweiligen Winkel bestimmt wird. Genauer gesagt heißt das, dass man die kürzeste Strecke benötigt, die man in der Zeit t zurückgelegt hat, benötigt, weil sonst ist der Innenwinkelsummensatz nicht erfüllt wegen der Winkel, die größer als 180° sind. Außerdem wäre die vorgegebene Strecke die längste Seite,was den rechten Winkel zerstört und das Benutzen der Winkelfunktionen unmöglich machen würde. Nach Ermitteln der größten Strecke kann man mit den Winkelfunktionen weiter verfahren und zwar folgendermaßen: $s_t \cdot \cos \alpha = s_r$ (siehe Zeichnung 2)



Zeichnung 2: Beispiel für gesuchte Seite

s_t ist die vorbestimmte Strecke, α der Winkel zwischen s_t und s_r und s_r ist die zu bestimmene Strecke.

Beziehung zwischen Winkel und Geschwindigkeit	
Strecke	10 m
Zeit	1 s
festgelegte Geschwindigkeit	10 m/s

Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit

Gradmaß	Bogenmaß	Geschwindigkei	benötigte Zeit in Sekunden
0	0	10	1
10	0,17	9,85	1,02
20	0,35	9,4	1,06
30	0,52	8,66	1,15
40	0,7	7,66	1,31
50	0,87	6,43	1,56
60	1,05	5	2
70	1,22	3,42	2,92
80	1,4	1,74	5,76
90	1,57	0	1,63E+016

Tabelle 1: Tabelle zur Umrechnung von Winkel zu Geschwindigkeit

2.2.2.Berechnung der Volumina

Das Berechnen der Volumina einfacher geometrischer Figuren ist für das Bestimmen der

Wassermenge, die einen Körper treffen von entscheidender Bedeutung, deshalb sind hier einige Anmerkungen zu den Formeln, die für das weitere Verständnis hilfreich sind:

Berechnung des Volumens eines Prismas:

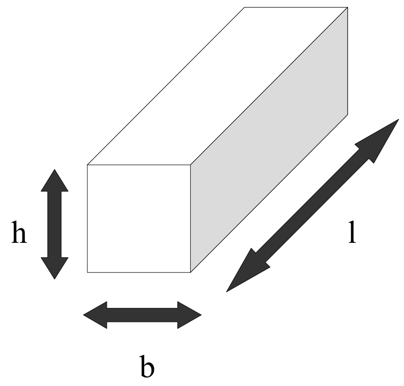
gegebene Größen:

$A_{n\text{-}Eck}$ = Vorderfläche des Prismas

h = Höhe des Prismas in m

Formel zum Berechnen bei einem beliebigen n-Eck (siehe Zeichnung 3):

$$V_{Prisma} = A_{n\text{-}Eck} \cdot h_{Prisma}$$



Zeichnung 3: Beispiel für das Berechnen von V_{Prisma}

3.Rechnerische Lösung

Wie zuvor erwähnt, wird nun das Volumen berechnet, damit man die aufgenommene Regenmenge in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit auf einem vorbestimmten Weg errechnen kann. Dieser Raum entsteht durch das Herabfallen des Regens und durch die Bewegung einer Fläche entlang einer Strecke. Man unterscheidet zwischen zwei unterschiedlichen Flächen:

1. die vordere Fläche, also die Fläche, die sich aus Höhe und Breite des Menschens ergibt (siehe Abbildung 2)

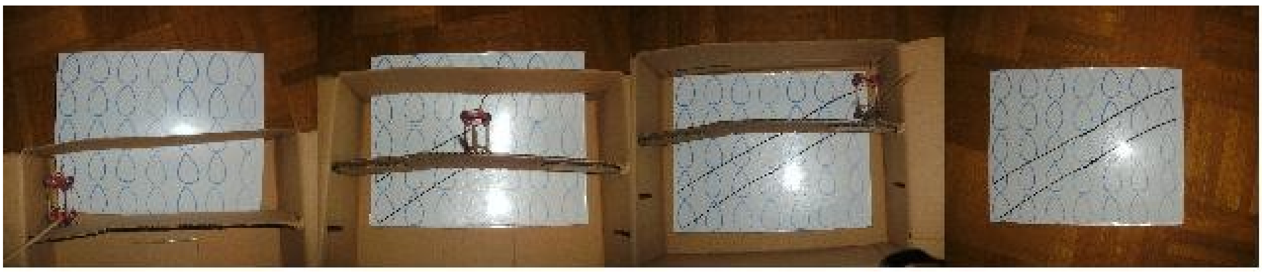


Abbildung 2: 2D-Modell zur Verdeutlichung des Volumens von der vorderen Fläche auf einer beliebigen Strecke

2. die obere Fläche, d.h. die Fläche, die sich aus Breite und Tiefe des Menschens zusammensetzt (siehe Abbildung 3)

Abbildung 3: 2D-Modell zur Verdeutlichung des Volumens von der oberen Fläche auf einer beliebigen Strecke

Die Bewegung der Vorderfläche ist abhängig von der zurückgelegten Strecke und von der Oberfläche des Menschen. Zeit und Geschwindigkeit spielen auf einer festgelegten Strecke nur eine untergeordnete Rolle. Zwar ergibt sich aus dem Produkt der beiden Faktoren Δs, jedoch ist Δt und v antiproportional, was heißt, dass je mehr die Zeit bzw. die Geschwindigkeit steigt, desto eher sinkt die Geschwindigkeit bzw. die Zeit. Das hat zur Folge, dass wenn wir beide Faktoren multiplizieren das gleiche Ergebnis bezüglich der Regenmenge herauskommt. (siehe Zeichnung 4)

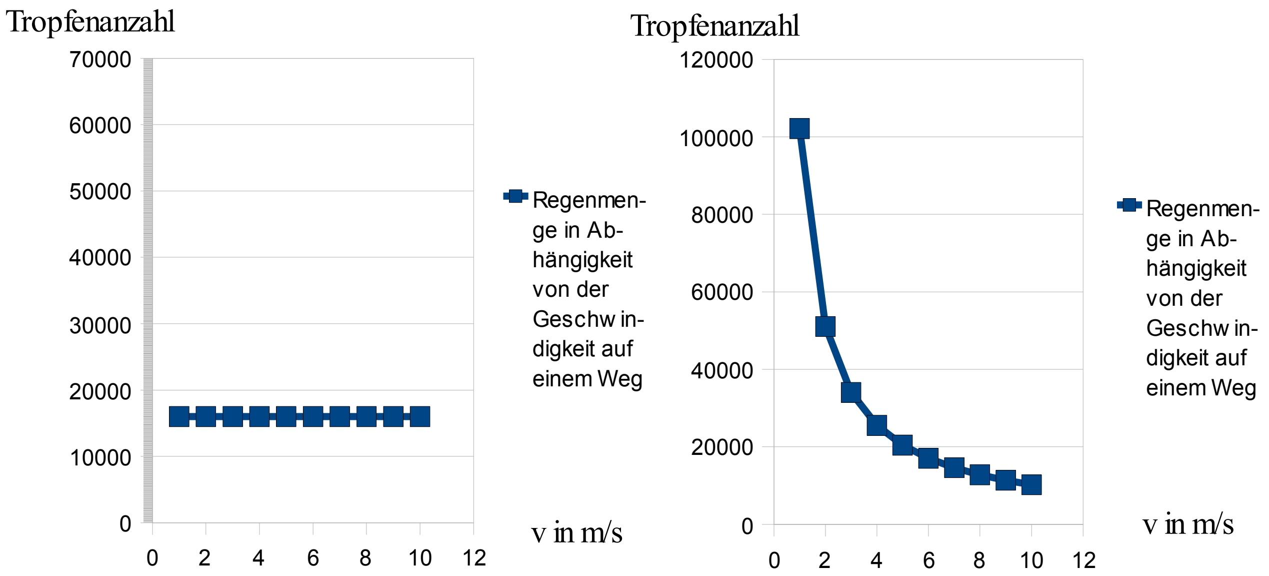
Die Formel für das Volumen der vorderen Fläche lautet: $V_{A_1} = \Delta s_K \cdot A_1$,

wobei V_{A_1} das Volumen ist, Δs_K ist die zurückgelegte Strecke des Körpers und A_1 ist die vordere beregnete Strecke. Folglich ist das Volumen gleich 0, wenn Δs_K 0 entspricht.

Die andere Formel für die Regenmenge, die auf den Kopf trifft, setzt sich ebenfalls aus der Strecke des Körpers zusammen, aber jetzt spielt sowohl die Strecke des Regens, als auch die Fläche, die von oben nass wird, eine Rolle. Jedoch darf man die Größe der Breite nicht vernachlässigen, weil diese ermöglicht den dreidimensionalen Körper. Sie lautet:

$$V_{A2} = \frac{\Delta s_K}{2} \cdot \Delta s_K \cdot b_M + A_2 \cdot \Delta s_R$$

V_{A_2} entspricht dem Volumen, welches die Kopffläche trifft, Δs_R ist die zurückgelegte Strecke des Regens, A_2 ist die obere Fläche, b_M ist die Breite des Menschens und die restlichen festgelegten Variablen sind identisch zu denen der ersten Formel. Die Produkte sind weder proportional noch antiproportional, was an dem zweiten Summanden liegt.



Zeichnung 4: Vergleich von der Regenmenge von vorne und von oben in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

Des Weiteren ist diese Funktion nicht linear, sondern parabelförmig (siehe Zeichnung 4), denn für Δs_K kann man auch $v_K \cdot \Delta t(K)$ schreiben, sowie für $\Delta s_R = v_R \cdot \Delta t(R)$. Daraus ergibt sich dann $(\Delta t)^2$, was eine quadratische Funktion ist und schlussendlich zu einer Parabel, die in y-Richtung verschoben wird, führt, weshalb man sehen kann, dass je höher die Geschwindigkeit werden, die man miteinander vergleicht, desto minimaler ist die Differenz zwischen der aufgenommenen Regenmenge. Die angehängte Rechnung $A_2 \cdot \Delta s_R$ stellt das Volumen dar, welches in jedem Fall aufgefangen wird, da selbst bei Stillstand die obere Fläche bei senkrechtem Regen etwas Wasser

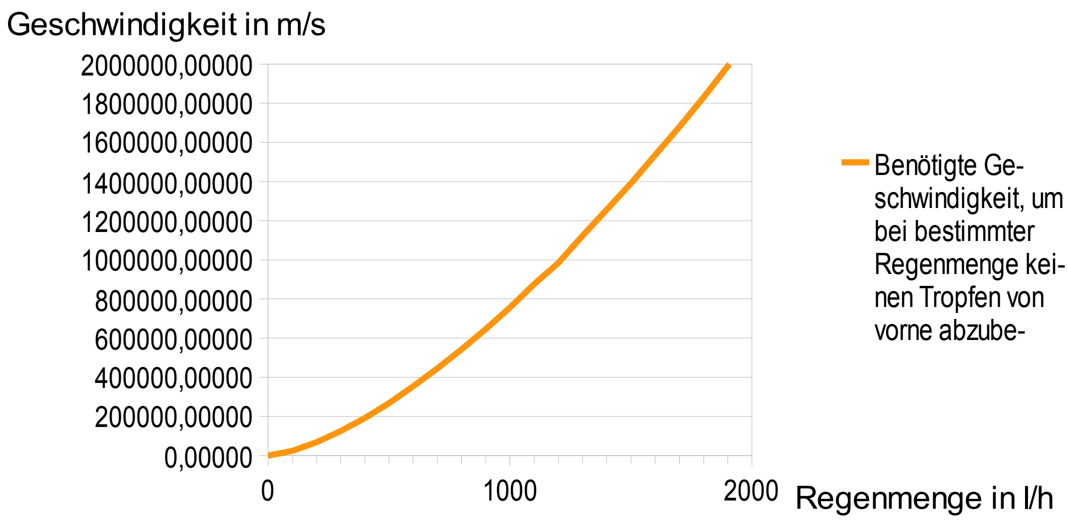


Diagramm 1: Zuordnung Regenmenge in l/m²h -> Geschwindigkeit in m/s, um von oben nicht nass zu werden

aufnimmt. Dazu muss man aber auch sagen, dass man bei einer endlichen Strecke unendlich lange im Regen steht und somit ewig nass wird, weshalb es beim zweiten Diagramm keinen Wert für x=0 gibt.

Was ebenfalls aus diesen Diagrammen folgt, ist dass das Beregnen von oben eine wichtige Rolle spielt, weil erstens ist die Menge an Regen bei niedrigen Geschwindigkeiten zwischen 0-5m/s sehr hoch. Und zweitens haben wir eine signifikante Änderung bei den Geschwindigkeiten von 0-10 m/s, welche wir bei der Beregnung von vorne nicht haben. Nur das Stehenbleiben stellt bei der Beregnung von vorne eine Besonderheit dar, da an diesem Fall kein Regen auf die vordere Fläche gelangen kann, was jedoch nur für senkrechten Regen gilt. Was man zum zweiten Diagramm noch sagen kann, ist dass der Graph der Funktion sich immer mehr an die x-Achse schmiegt, jedoch nie 0 erreichen wird. Dazu muss man allerdings bemerken, dass man aus rein logischer Sicht, ab einer bestimmten Geschwindigkeit, in Abhängigkeit von der Regenmenge pro m³ und Sekunde, sowie auf einer bestimmten Strecke, keine Tropfen von oben aufsammelt, denn das Volumen ist so klein, dass man theoretisch nur einen Bruchteil eines Tropfens auffängt. In Diagramm 1 sind solche Situationen zu sehen. Die vorgegebene Strecke ist 100m, und je nach Regenmenge muss man den jeweiligen y-Wert erreichen, um rechnerisch gesehen am minimalsten nass zu werden. Doch es muss gesagt werden, dass es sehr unrealistisch für einen Menschen ist, über 23000 m/s aus eigener Kraft zu erreichen, geschweige denn solche Geschwindigkeiten körperlich zu ertragen.

Ferner kann man sagen, dass sich die Regenmenge bei zunehmender Strecke proportional von vorne und von oben parabelförmig steigert, da nur die Faktoren höher werden. Außerdem zeigt der

Tropfenmenge ml/h	Anzahl der Tropfen	
0	0	0,000
100	53,46	1204,124
200	151,2	3405,776
300	277,78	6256,811
400	427,67	9632,991
500	597,68	13462,514
600	785,67	17696,934
700	990,06	22300,685
800	1209,62	27246,212
900	1443,38	32511,343
1000	1690,5	38077,738
1100	1950,31	43929,896
1200	2222,22	50054,487

Tabelle 2: Anzahl der Tropfen in Abhängigkeit von der Regenmenge pro ml/h

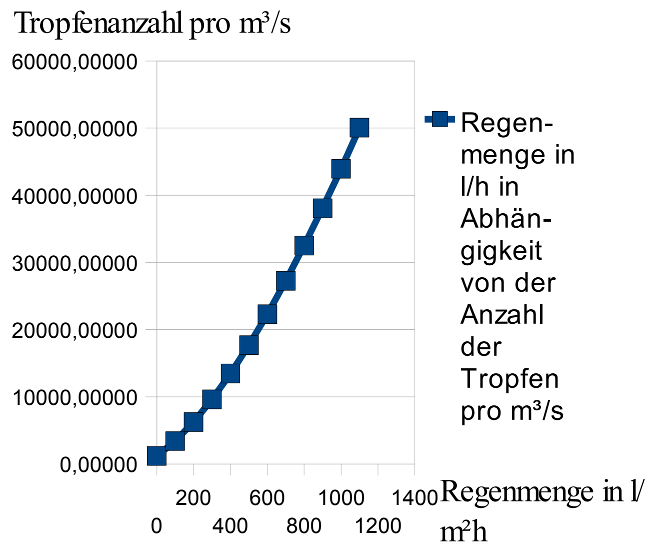


Diagramm 2: zu Tabelle 2 zugehöriges Diagramm

Vergleich bei einer festgelegten Geschwindigkeit und Strecke, dass bei verschiedenen Regenmengen, die Differenz zweier Werte mit dem Erreichen höherer Regenmengen steigt, was daran liegt, dass die Anzahl der Tropfen ebenfalls parabelförmig ansteigt und für die richtige Berechnung man diese Werte mit dem gleichen Volumen multipliziert (siehe Tabelle 2 und Diagramm 2).

4.Fehleranalyse

Da die Mathematik auf Beweise beruht und es nur wahre bzw. falsche Aussagen gibt, gibt es nur einen Fehler, der am meisten beeinflusst und zwar Rundungsfehler, für die z.B. beim Berechnen des Volumens oder beim Bestimmen der Regenmenge auftreten können.

5.Zusammenfassung

Im Großen und Ganzen kann man sagen, dass die Geschwindigkeit sehr wichtig für die Regenmenge ist, die jemand aufnehmen kann, da die Menge, von oben, bei Verdopplung der Geschwindigkeit, teilweise um mehr als ein Viertel geringer ist, als wenn man nur halb so schnell läuft. Theoretisch gibt es optimale Geschwindigkeiten, die kleiner als Lichtgeschwindigkeit ist, um die minimalste Anzahl an Tropfen aufzufangen, doch erstens kann ein Mensch solche Geschwindigkeiten von sich aus nicht erreichen, zweitens das Trockenbleiben von oben ist gekoppelt an die Geschwindigkeit des Menschens, die Strecke, die zurückgelegt wird und die Regenmenge in l/h und drittens ist das nur eine theoretische Lösung, weil in der Praxis gibt es weitere Parameter, wie zum Beispiel Wind.

6.Weiterführung

Aufgrund der Komplexität dieses Themas gibt es viele verschiedene Ausrichtungen, die bei der Weiterführung dieses Projektes für mich interessant wären. Da wäre zum Einen das Abgleichen der mathematischen Ergebnissen mit einem angemessenen experimentellen Aufbau, um Gemeinsamkeiten und Unterschiede feststellen zu können, der gegebenenfalls in einem kleineren Maßstab errichtet werden kann. Zum Anderen könnte man das Programmieren einer Simulation auf Grundlage dieser Erkenntnisse anfangen. Aber sowohl das bessere mathematisch Annähern (durch Finite Elemente Methode), als auch das Bestimmen der Regenmenge unter weiteren Einflüssen, wie Wind oder unregelmäßiger Regenfluss, wären Ideen für eine Fortsetzung dieses Projekts. Eine andere Anregung, die ich bekommen habe, ist das Errechnen der Regenmenge bei einem Menschen, der einen Regenschirm hat und bei welchen Geschwindigkeiten ein Regenschirm nur noch teilweise bzw. gar nicht hilft. Gegen einen Vergleich der aufgenommenen Regenmenge zwischen einem stehenden Menschen und einem rennenden Menschen in Abhängigkeit von Zeit und Geschwindigkeit bin ich jedoch auch nicht abgeneigt.

7.Danksagung

Ich möchte meinen Freunden und meiner Familie für ihre seelische Unterstützung danken, aber auch für kreative Vorschläge und Hilfestellungen. Außerdem möchte ich mich bei Herrn Biedermann bedanken, der mir fachlich mit Rat und Tat zur Seite stand.

8.Quellenhinweise

Literaturhinweis:

[1] Das große Tafelwerk interaktiv, Cornelsen, 2012, Seite 90

Internetquellen:

[2] www.wikipedia.org/wiki/Regen

[3] http://www.wdr5.de/sendungen/leonardo/s/d/29.04.2010-16.05/b/die-kleine-anfrage-wie-viel-tropfen-sind-in-einem-liter.html

[4] http://de.wikipedia.org/wiki/Tropfen