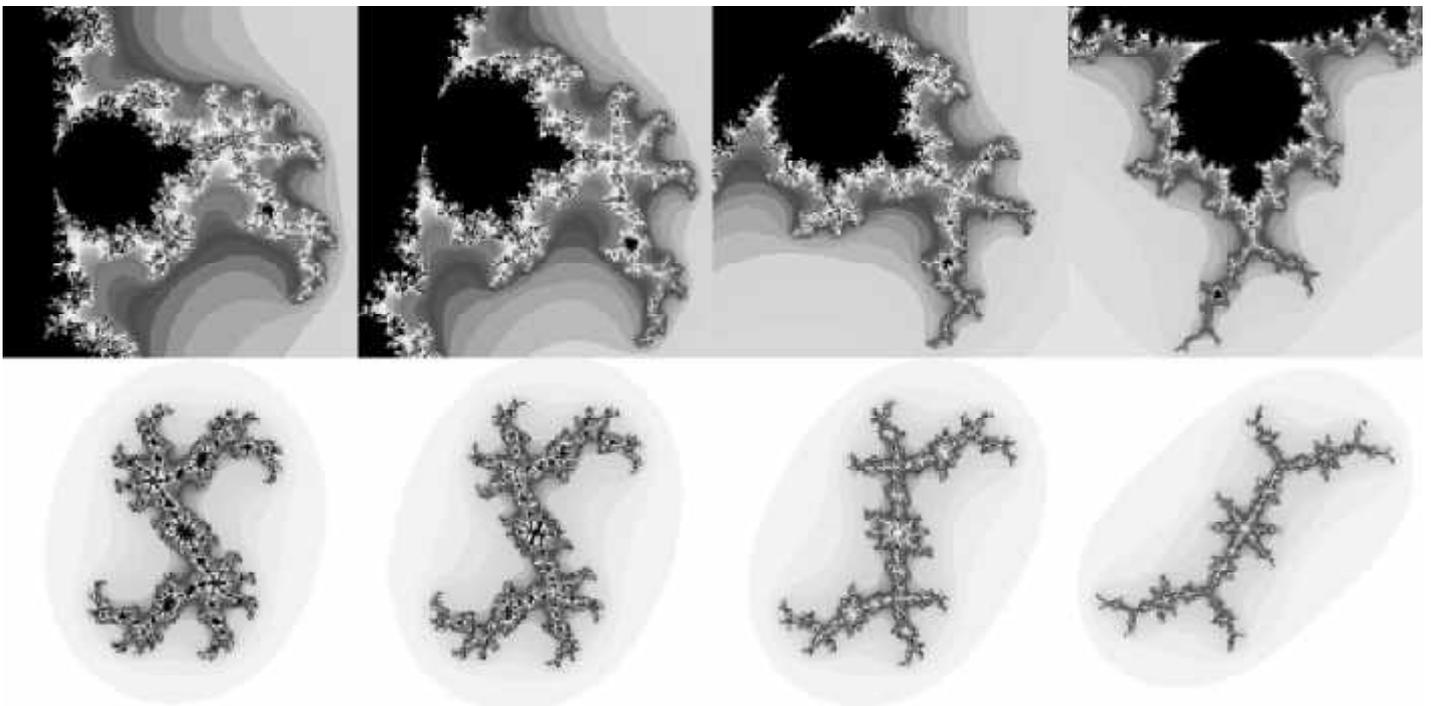


Kompl exe dynamische Systeme



Wettbewerb "Jugend Forscht" 2005

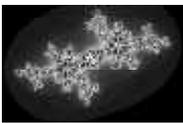
Simone Hohls (15 Jahre)

Katja Miller (16 Jahre)

**Arbeitsgemeinschaft "Jugend Forscht"
des Christian-Gymnasiums Hermannsburg
Leitung: StD Thomas Biedermann**

Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung	3
2.	Theorie	4
2.1	Komplexe Zahlen	4
2.2	Chaos	5
2.3	Feigenbaumdiagramm	6
2.4	Dynamische Systeme	6
2.5	Theorie, Julia- und Mandelbrotmengen	7
2.5.1	Visualisierung	8
2.5.2	Eigenschaften	9
2.5.2.1	Fraktale und gebrochene Dimensionen	9
2.5.2.2	Selbstähnlichkeit, Sensitivität und Komplexität	9
2.5.2.3	Langzeitverhalten	10
2.5.2.4	Berechenbare Punkte	10
3.	Programme	11
3.1	Juliamengen	11
3.2	Rückwärtsiteration	11
3.3	Perioden	11
4.	Eigene Ergebnisse	12
4.1	Variationen der Mandelbrotmenge	12
4.2	Variationen der Juliamengen	13
4.3	Zusammenhänge zwischen Mandelbrot- und Juliamengen	14
4.4	Selbstähnlichkeit	15
4.5	Perioden	15
5.	Schluss	16
	Quellen	17
	Danksagung	17
	Anhang	18
I	Komplexe Wurzel mit Kartesischen Koordinaten	18
II	Lösen einer komplexen Quadratischen Gleichung	18
III	Graphische Iteration	19
IV	Dimensionsbestimmung der Kochkurve	20



1. Einleitung

Zu aller erst wollen wir uns mal von der schönen euklidischen Geometrie mit ihren ganzzahligen Dimensionen ($D \in \mathbb{N}$) verabschieden. Es gibt eben nicht nur die uns aus der Schulmathematik bekannten null-dimensionalen Punkte, eindimensionalen Linien, zweidimensionalen Flächen und dreidimensionalen Körper. Aber wie soll man sich etwas zwischen Fläche und Körper vorstellen? Als etwas, das mehr als eine Fläche ist aber den dreidimensionalen Raum nicht komplett ausfüllt und sich nicht wie Kreis oder Kugel einfach beschreiben lässt. Solche Objekte, die Fraktale, sind in der Natur *en masse* vorhanden, wie zum Beispiel Wolken, Kapillaren, Bäume uvm.

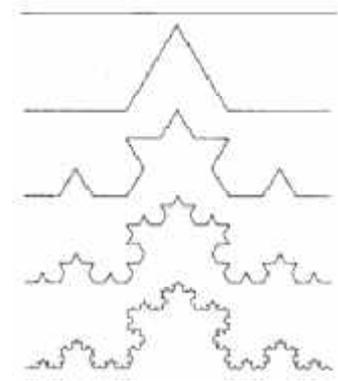


Abb. 1: Die ersten vier Abbildungen nach den Bildungsgesetzen der Kochkurve

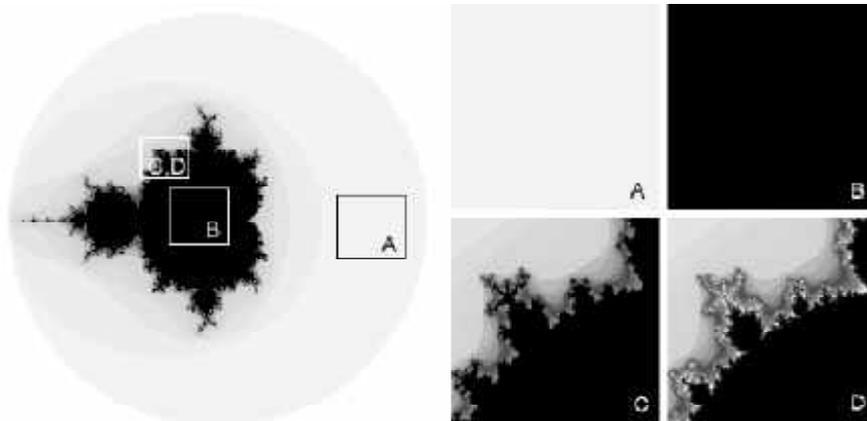


Abb. 2: Unterschiedliche Bereiche des Apfelmännchens (Farbbild auf CD)

Fraktale lassen sich auch mit einfachen Bildungsgesetzen erzeugen. Das entscheidende dabei ist, dass Fraktale nie ihre endgültige Form erreichen, sondern immer nur Annäherungen sind. Ein bekanntes Beispiel ist die Kochkurve. Sie entsteht aus einer einfachen Linie, aus der man das mittlere Drittel entfernt und dieses durch ein gleichseitiges Dreieck mit derselben Kantenlänge des entfernten Stücks ersetzt (siehe Abb. 1). Dieser Prozess wird mit allen dabei entstehenden Streckenabschnitten unendlich oft wiederholt. Da jeder Algorithmus irgendwann abbrechen muss, bleibt die Kochkurve immer nur eine Annäherung. Ihre Dimension ist ungefähr 1,262.

Auch das populäre Apfelmännchen ist ein Fraktal (siehe Abb. 2, CD). Das eigentliche Fraktal ist die Linie, die den schwarzen Bereich umschließt. Seine Dimension ist nahe zwei, womit es beinahe eine Fläche ist. Je weiter man sich vom Fraktal entfernt, desto uninteressanter wird das Bild (siehe A und B). Beim näheren Betrachten der Linie jedoch fällt einem auf, dass sie Formen und Strukturen aufweist, die dem gesamten Apfelmännchen ähneln (siehe C). Erhöht man die Rechentiefe, verändern sich die Strukturen stark und werden erheblich komplizierter (siehe D).

Apfelmännchen sind eigentlich die Visualisierung bestimmter dynamischer Systeme ähnlich der Wetterkarte für das Wetter (siehe Abb. 3). Das Wetter auch nur zum aktuellen Zeitpunkt genau zu bestimm-

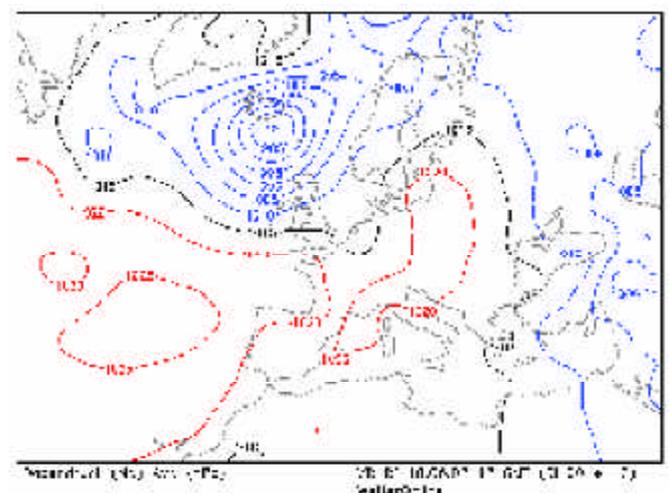
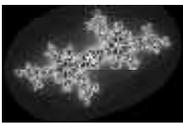


Abb. 3: Wetterkarte mit Isobaren (Quelle: www.swg.ch/wulchi/flugberichte/030102/)



men ist schon unmöglich. Dennoch kann man über bestimmte Eigenschaften Aussagen machen. So, wie die Karte mit den Isobaren Auskünfte über den Zustand des Wetters erlaubt, gibt das Apfelmännchen Auskünfte über sein System beziehungsweise über die Bewegung einzelner Punkte im System. Die Untersuchung komplexer dynamischer Systeme, das Thema unserer Arbeit, lässt Rückschlüsse auf andere dynamische Systeme zu und hilft, deren Eigenarten (z.B. Unvorhersagbarkeit) zu verstehen.

2. Theorie

2.1 Komplexe Zahlen

Der Wunsch, auch algebraische Gleichungen lösen zu können, die unter den reellen Zahlen keine Lösung haben, veranlasste Mathematiker dazu, den Körper der reellen Zahlen derart zu erweitern, dass dieses möglich ist. Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ zum Beispiel wäre nicht lösbar, da Wurzelziehen aus einer negativen Zahl nicht möglich ist. Daher wurde die imaginäre Einheit i eingeführt, welche die gewünschte Eigenschaft $i^2 = -1$ besitzt.

Komplexe Zahlen werden meist in der Form $z = x + yi$ geschrieben, wobei das x den Realteil $\operatorname{Re}(z) = x$ und das y den Imaginärteil $\operatorname{Im}(z) = y$ bezeichnet. Die zweite Möglichkeit sind Polarkoordinaten. Hier wird die komplexe Zahl als Vektor betrachtet und über Betrag und Polarwinkel angegeben. Komplexe Zahlen deren Imaginärteil gleich Null ist, verhalten sich wie reelle Zahlen; d.h. jede reelle Zahl ist eine komplexe Zahl mit Imaginärteil Null.

Die Darstellung komplexer Zahlen ist in einem Koordinatensystem möglich. Man erweitert die x -Achse der reellen um eine y -Achse der imaginären Zahlen. Reelle Zahlen können somit auf der x -Achse und imaginäre auf der y -Achse gefunden werden. Die aus reellen und imaginären Zahlen bestehenden komplexen Zahlen haben somit alle zwei Koordinaten, ihren Real- sowie Imaginärteil.

Bei Addition und Subtraktion komplexer Zahlen wird die Operation komponentenweise durchgeführt; d.h. man addiert oder subtrahiert die beiden Real- und die beiden Imaginärteile separat, sodass gilt:

$$z + w = (x + yi) + (u + vi) = (x + u) + (y + v)i$$

$$z - w = (x + yi) - (u + vi) = (x - u) + (y - v)i$$

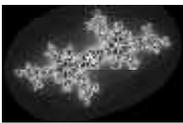
Bei der Multiplikation besteht der Realteil des Produkts aus dem Produkt der Realteile abzüglich dem Produkt der Imaginärteile, der Imaginärteil des Produkts ist die Summe der beiden gemeinsamen Produkte aus Realteil und Imaginärteil.

$$z \cdot w = (x + yi) \cdot (u + vi) = xu + xvi + uyi + yvi^2 = (xu - vy) + (xv + yu)i$$

Den Quotienten zweier komplexer Zahlen berechnet man, indem man mit dem komplex konjugierten Nenner erweitert, wodurch der Nenner reell wird. Die konjugiert komplexe Zahl zu z erhält man, indem man den Imaginärteil y durch sein negatives $-y$ ersetzt. Aus $z = x + yi$ wird so $z^* = x - yi$. Das Produkt konjugierter Zahlen $z \cdot z^*$ ist

$$(x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - xyi + xyi + y^2 = x^2 + y^2.$$

Bei der Division zweier komplexer Zahlen erhält man also:



$$\frac{(x + yi)}{(u + vi)} = \frac{(x + yi)}{(u + vi)} \cdot \frac{(u - vi)}{(u - vi)} = \frac{(xu + yv)}{(u^2 + v^2)} + \frac{(xv - yu)i}{(u^2 + v^2)}$$

Des Weiteren gelten auch für die komplexen Zahlen Assoziativ-, Kommutativ- sowie Distributivgesetz.

Die Formel für die n-te Wurzel einer komplexen Zahl z lautet

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \cos(\sqrt[n]{\arg(z)} + 2k\pi/n) + i \sin(\sqrt[n]{\arg(z)} + 2k\pi/n)$$

wobei n Lösungen möglich sind, die durch die verschiedenen Werte k (für $k \in \mathbb{N}$; $k = (0; 1; \dots; n-1)$) berechnet werden. [10]

In unseren Computerprogrammen ist es jedoch günstiger, für das Ziehen von Wurzeln die kartesischen Koordinaten zu verwenden. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten :

Entweder werden die kartesischen Koordinaten zum Ziehen der Wurzeln in Polarkoordinaten umgewandelt oder es muss eine andere Formel - was nur bei Quadratwurzeln möglich ist - verwendet werden.

Es gibt drei gesondert zu betrachtende Fälle. Der erste Fall, wenn der Imaginärteil ci gleich Null ist, ist denkbar einfach. Falls der Realteil c kleiner Null ist, gilt

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{c + \sqrt{c^2 + ci^2}} \quad \text{und} \quad y = \frac{ci}{2x}$$

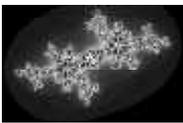
Ansonsten muss - um Division durch Null zu vermeiden, die durch Rundungsfehler auftreten kann - folgende Formel verwendet werden (Herleitung siehe Anhang I) [2]

$$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{-c + \sqrt{c^2 + ci^2}} \quad \text{und} \quad x = \frac{ci}{2y}$$

2.2 Chaos

Chaos wird in unserem Sprachgebrauch mit Regellosigkeit, Unordnung und Verwirrung gleichgesetzt. Im mathematischen Sinn werden zwei Arten von Chaos unterschieden: das deterministische und das stochastische. Letzteres ist tatsächlich zufällig und nur über Wahrscheinlichkeiten zu beschreiben, wie z.B. in der Quantenmechanik. Deterministisches Chaos scheint nur unberechenbar, weil z.B. eine genaue Bestimmung des Zustands eines Systems oft nicht möglich ist; tatsächlich folgt es jedoch strengen Gesetzmäßigkeiten, womit theoretisch eine Berechnung möglich wäre. Die Chaostheorie beschäftigt sich mit der prinzipiellen Unvorhersagbarkeit von nicht-linearen dynamischen Systemen durch minimale Veränderung (oder ungenaue Bestimmung) der Anfangsbedingungen. (zu Eigenschaften siehe Kapitel 2.4)

Es gibt drei klassische Wege ins Chaos. Der erste ist der über die Intermittenz, die nichts anderes als unregelmäßiges Hin- und Herspringen zwischen verschiedenen Zuständen bedeutet. Intermittenz beschreibt dabei den Übergang zwischen periodischem und chaotischem Verhalten [11]. Der zweite Weg ist der der Quasiperiodizität, die aperiodisches Verhalten beschreibt. Bei Julia- und Mandelbrotmengen tritt aber vor allem das Szenario der Periodenverdopplung (Bifurkation) auf.



2.3 Feigenbaumdiagramm

Das Feigenbaumdiagramm visualisiert den Weg eines quadratischen Iterators ($x_1 = x_0^2 + a$) über die Periodenverdopplung ins Chaos (siehe Abb. 4). Im Zuge der Periodenverdopplung wird die Struktur immer komplizierter und am rechten Rand des Feigenbaumdiagramms ist das ganze Intervall von Chaos bedeckt. Der Übergang ist durch einen kritischen Wert, den Feigenbaumpunkt, gekennzeichnet, an dem die regelmäßige Periodenverdopplung abbricht und in Chaos umschlägt.

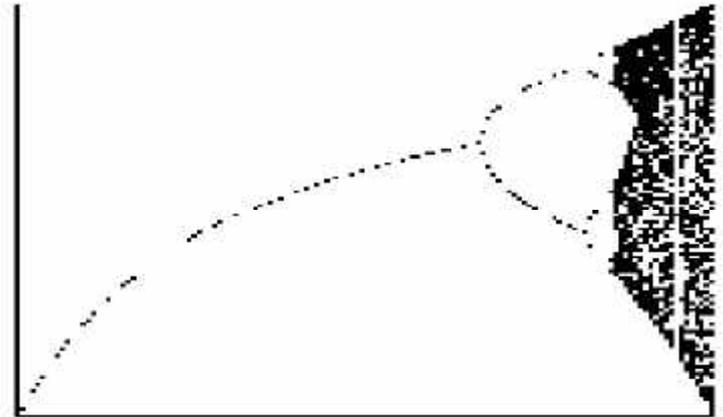


Abb. 4: Feigenbaumdiagramm $x_1 = 4x_0(x_0 - 1)$

Dieser Punkt teilt das Feigenbaumdiagramm in zwei Teile mit grundlegend unterschiedlichen Eigenschaften. Trotzdem treten auch im chaotischen Bereich ganz plötzlich wieder berechenbare Zonen auf.

Im Feigenbaumdiagramm werden für jeden Startwert die Endzustände, oder besser, das Langzeitverhalten der Iteration gegen die Startwerte aufgetragen. Dazu wird eine bestimmte Anzahl von Iterationen durchgeführt um einen möglichen periodischen Zyklus zu erreichen und dann die folgenden Werte ins Diagramm einzutragen.

Das Feigenbaumdiagramm ist des weiteren ein Fraktal, da man bei jeder Vergrößerung nicht nur ähnliche Strukturen erhält, sondern auch nie die endgültige Form wird festlegen können.

2.4 Dynamische Systeme

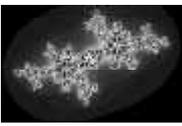
Ein System besteht aus verschiedenen Elementen, die untereinander durch bestimmte Gesetzmäßigkeiten in Beziehung stehen. Es kann kein Element aus einem System entfernt werden, ohne dass die ursprüngliche Funktion verloren geht.

Als dynamisch gilt ein System dann, wenn sich sein Verhalten in Abhängigkeit von der Zeit ändert [1]. Wie kompliziert ein System ist, hängt von der Zahl seiner Elemente und von der Art der Beziehungen ab.

Wir betrachten in unserer Arbeit nur die deterministischen, also jene dynamischen Systeme, deren Zustand sich zu jedem Zeitpunkt mit "hinreichender Genauigkeit" bestimmen lässt [3]. Diese unterscheidet man in die leicht berechenbaren linearen Systeme und die nicht-linearen Systemen.

Nicht-lineare Systeme sind gewissermaßen nicht "vorhersagbar" oder sogar chaotisch. Dennoch lassen sich die meisten dieser Systeme berechnen und strenge Gesetzmäßigkeiten entdecken. So wird keiner vorhersagen können, wo die Kugel beim Roulette landet - trotzdem wäre die Bahn berechenbar, vorausgesetzt man kennt alle Parameter mit unendlicher Genauigkeit, was natürlich unmöglich ist. Genauso lässt sich oft eine kurzzeitige Vorhersage über ein System machen, doch das Langzeitverhalten ist wie beim Wetter vollkommen unvorhersehbar und hängt sensitiv von den Anfangsbedingungen ab.

Solche nicht-linearen dynamischen Systeme haben weitere gemeinsame Eigenschaften, wie die Selbstähnlichkeit, nach der man immer wiederkehrende ähnliche Muster finden kann. Zudem werden sie mit einer eigenen Geometrie beschrieben - der fraktalen Geometrie - in der gebrochene, fraktale Dimensionen auftreten.



Eine weitere Eigenschaft ist die Selbstorganisation, d.h. dass jedes dynamische System trotz der chaotischen Eigenschaften letztendlich in eine gewisse Ordnung findet. Bestes Beispiel sind Tierpopulationen, die - auch nachdem der Mensch eingegriffen hat - wieder in ein natürliches Gleichgewicht finden. Zudem kann sich das System deterministisch verhalten, aber auch ganz plötzlich in einen chaotischen Zustand umschlagen (vgl. "Feigenbaum"). [2]

Eine Besonderheit sind die komplexen dynamischen Systeme, die statt reellen komplexe Zahlen verwenden. Sie sind eine Konstruktion der Mathematiker und haben keine Entsprechung in der Realität. Dennoch lässt ihre Untersuchung Rückschlüsse auf das Verhalten von normalen dynamischen Systemen zu.

Man muss bei der Beschreibung von dynamischen Systemen beachten, dass die Komplexität eines dynamischen Systems beschreibt, wie kompliziert ein System ist, während ein "komplexes dynamisches System" zwar durchaus kompliziert sein kann, jedoch von uns hier lediglich die Verwendung von komplexen Zahlen gemeint ist. Deshalb wollen wir den Begriff "komplex" soweit möglich nur im Zusammenhang mit komplexen Zahlen nutzen, um Missverständnisse zu vermeiden, auch wenn in der Literatur teilweise andere Verwendungen zu finden sind.

2.5 Theorie, Julia- und Mandelbrotmengen

Julia- und Mandelbrotmengen sind Fraktale die durch dieselbe komplexe quadratische Gleichung $z_1 = z_0^2 + c$ gebildet werden, wobei man nur Konstante und Variable vertauscht. Die Mandelbrotmenge wird auch als "Apfelmännchen" bezeichnet. Bei der Visualisierung werden konvergierende und divergierende Startwerte farbig entsprechen der "Dauer ihrer Flucht" gekennzeichnet. Die Mandelbrotmengen werden aus genau den Punkten gebildet, die weder zur Gefangenen- noch zur Fluchtmenge gehören. Beide Fraktale haben gemeinsame Eigenschaften. Dazu gehören:

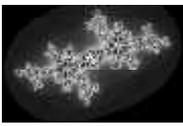
- gebrochene fraktale Dimensionen
- Selbstähnlichkeit
- Komplexität
- Sensitivität gegenüber den Anfangsbedingungen

Mandelbrotmengen haben noch weitere Eigenschaften. So sind sie symmetrisch zur reellen Achse, beschränkt durch die Einkreisung $|c| \leq 2$, abgeschlossen, zusammenhängend und der reelle Anteil ist das Intervall $[-2, \frac{1}{4}]$.

Auch wenn Mandelbrot- und Juliamengen auf den ersten Blick sehr unterschiedlich aussehen, so ist die Mandelbrotmenge in der Nähe von c immer ähnlich zu der Juliamenge von c . Die Mandelbrotmenge ist somit eine "Landkarte" für die Juliamengen.

Juliamengen sind punktsymmetrisch zum Ursprung und nur für den Fall, dass der Imaginärteil gleich Null ist, spiegelsymmetrisch zu beiden Achsen. Sie sind nur dann zusammenhängend, wenn der Parameter c in der Mandelbrotmenge zur Gefangenenmenge gehört. [4, 5]

Im Folgenden werden wir die Visualisierung und die wichtigsten Eigenschaften näher erläutern.



2.5.1 Visualisierung

Dynamische Systeme sind schwer zu untersuchen, da sie abhängig von den Startwerten sehr unterschiedliche Zustände einnehmen können. Eine gute Möglichkeit, trotzdem bestimmte Eigenschaften herauszufinden, besteht darin, dass man jedem Anfangswert einen Punkt auf einem Zahlenstrahl oder in einem Koordinatensystem zuordnet, für diesen die Eigenschaft berechnet und den Punkt entsprechend farblich markiert. Eben diese Visualisierung des Langzeitverhaltens verschiedener Punkte ist das Apfelmännchen für die Iteration der komplexen Gleichung $z_1 = z_0^2 + c$.

Hier wird jedem komplexen Startwert ein Punkt im Koordinatensystem zugewiesen und die Anzahl der Iterationen gezählt, die nötig sind, bis die Bahn des Punktes einen Wert mit einem Betrag größer als zwei liefert. Alle Punkte, die immer in diesem Kreis bleiben, werden schwarz gefärbt. Das Apfelmännchen entsteht, wenn der Parameter z auf Null gesetzt wird und c die Startkoordinaten erhält. Die Juliamengen entstehen, indem c eine beliebige Konstante ist, und z die Startkoordinaten enthält.

Damit wird auch klar, warum Julia- und Mandelbrotmengen immer nur annähernd bestimmt werden können. Man kann nie endgültig sagen, ob ein Punkt im Kreis bleibt, weil jeder Algorithmus irgendwann abbrechen muss.

Eine zweite Möglichkeit besteht darin, nicht das gesamte zu zeichnende Feld abzutasten, sondern so wenig Punkte wie möglich zu berechnen. Dazu teilt man die Ebene in Dreiecke. Jetzt wird auf der reellen Achse für eine bestimmte Rechentiefe genau das Dreieck gesucht, bei dem ein Eckpunkt zur divergierenden und ein weiterer Eckpunkt zur konvergierenden Menge gehört. In diesem Dreieck muss eine Linie liegen, die die Juliamenge näherungsweise einkreist. Jetzt genügt es, das angrenzende Dreieck zu suchen, das ebenfalls die gesuchte Julia- oder Mandelbrotmenge enthält und die Berechnung nach diesem Muster fortzusetzen, bis der Anfangswert wieder erreicht ist.

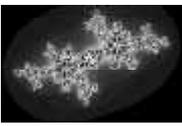
Eine weitere Methode der Visualisierung von Juliamengen ist die so genannte Rückwärtsiteration. Dabei wird ausgenutzt, dass Punkte in beliebiger Nähe der Juliamenge entweder konvergieren oder divergieren. Die Juliamenge wirkt also abstoßend. Kehrt man aber die Iterationsvorschrift um, so kehren sich auch die Eigenschaften um. Die Juliamenge wird zum Attraktor. Jetzt wird nicht mehr z_0 auf z_1 abgebildet, sondern z_1 auf z_0 .

$$z_0 \rightarrow z_1^2 + c \quad \text{daraus folgt:} \quad z_1 \rightarrow \pm\sqrt{z_0 - c}$$

Nutzt man die Rückwärtsiteration, so nähert sich jeder Punkt nach einer endlichen Zahl von Iterationen an die Juliamenge an. Dieses Verfahren lässt sich verbessern, indem man nicht mit einem beliebigen Punkt, sondern mit einem Punkt der Juliamenge beginnt. Ein solcher Punkt ist ein abstoßender Fixpunkt. Er lässt sich bestimmen, indem man die Gleichung

$$z_1^2 + c - z_0 = 0$$

löst. Dazu kann wie bei reellen Zahlen die p-q-Lösungsformel verwendet werden (Beispiel s. Anhang II). Diese Formel ergibt in der Regel zwei Lösungen, wobei die eine zu einem abstoßenden und die andere zu einem anziehenden Fixpunkt gehört. Entsprechend der Taylor-Entwicklung verwendet man die Ablei-



tung der normalen Transformation, die - wie bei reellen Funktionen - $2z$ ist. Ein abstoßender Fixpunkt ergibt dabei einen Absolutbetrag größer als eins.

2.5.2 Eigenschaften

2.5.2.1 Fraktale und gebrochene Dimensionen

Fraktale sind geometrische Gebilde, zu deren wichtigsten Merkmalen die Eigenschaft zählt, dass sich ihre Strukturen - manchmal auch verzerrt - in verschiedenen Maßstäben wiederholen. Das wichtigste Merkmal von Fraktalen ist neben Selbstähnlichkeit, Sensitivität und Komplexität die gebrochene "fraktale" Dimension.

Der Begriff "Dimension" beschreibt in diesem Zusammenhang etwas anderes als man es von der normalen Geometrie her kennt. Hier beschreibt er die Überdeckung einer Fläche durch eine Linie oder auch nur durch einzelne Punkte, aus denen das Fraktal besteht. Eine fraktale Dimension zwischen zwei und drei bezeichnet die Ausfüllung eines Raumes durch eine Fläche. Nötig ist diese Art der Bezeichnung, da es zum Beispiel Fälle gibt, in denen die genaue Bestimmung der Länge einer Linie nicht möglich ist. So wird man über die Länge von Küstenlinien und Landesgrenzen bei jeder Messung unterschiedliche Angaben bekommen, je nach Maßstab der Karte.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die fraktale Dimension zu bestimmen, bei Julia- und Mandelbrotmengen ist der Beweis einer Dimension "nahe zwei" erst 1991 von M. Shishikura [9] veröffentlicht worden. Bei einfachen Fraktalen, wie der Kochkurve, oder allen natürlichen Fraktalen (Blutgefäße, Wurzeln) ermittelt man die so genannte Box-Dimension. Dazu wird das Fraktal mit Gittern verschiedener Größe überzogen. Anschließend wird die Anzahl der vom Fraktal bedeckten Kästchen gezählt und der Logarithmus der Kästchenlänge s gegen den Logarithmus der Anzahl N der bedeckten Kästchen aufgetragen. Die negative Steigung ergibt dann die gesuchte Box-Dimension. Im Fall der Kochkurve ist das theoretisch $\sim 1,262$ (Abbildungen: Beispiel siehe Anhang IV). [6, 7]

2.5.2.2 Selbstähnlichkeit, Sensitivität und Komplexität

Fraktale werden als skaleninvariant bezeichnet, was bedeutet, dass ihre Erscheinung von ihrem Maßstab unabhängig ist. So sieht die Kochkurve (siehe Abb. 5) in jeder Vergrößerung wieder gleich aus. In jedem beliebig kleinen Bereich solcher Fraktale ist die gesamte Struktur enthalten und es gibt niemals eine kleinste Struktur. Auch in Julia- und Mandelbrotmengen lassen sich zu jeder Struktur im Fraktal an beliebiger Stelle beliebig viele ähnliche - oft verzerrte - Strukturen finden.

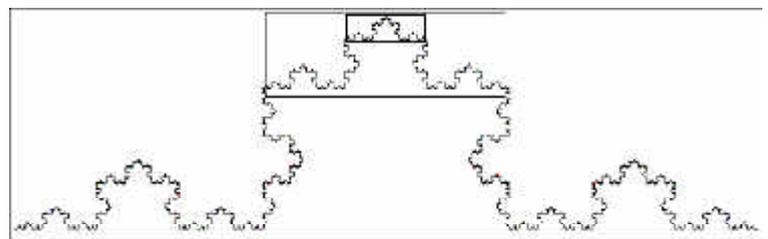
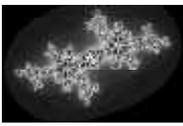


Abb. 5: Selbstähnlichkeit der Kochkurve

Sensitivität bedeutet, dass sich das Verhalten des Systems abhängig vom Startparameter an einigen Stellen komplett ändern

kann. So gibt es in der Mandelbrotmenge zwar Bereiche, die großflächig gleiches, berechenbares Verhalten aufweisen, aber in der Nähe des Fraktals ist das nicht mehr so. In beliebig kleinem Abstand zum Fraktal lassen sich Punkte finden, die konvergieren, divergieren, oder zum Fraktal selbst gehören und sich damit komplett unterschiedlich verhalten.



Komplexität bezeichnet die Eigenschaft, dass es unmöglich ist, eine endgültige Form der Mandelbrotmenge festzulegen. Man kann immer noch kompliziertere Formen finden. Die Komplexität ist unendlich.

2.5.2.3 Langzeitverhalten

Es gibt fünf verschiedene Möglichkeiten für das Langzeitverhalten eines Punktes in den untersuchten Systemen. Einige Punkte divergieren und streben auf einen unendlich fernen Attraktor zu. Die Julia- und Mandelbrotmengen selbst sind abgeschlossen, für alle Punkte in beliebiger Nähe aber abstoßend. Die Punkte innerhalb der Julia- und Mandelbrotmenge können entweder gegen einen festen Wert konvergieren, einen periodischen Zyklus einnehmen oder chaotisches Verhalten zeigen. [8]

2.5.2.4 Berechenbare Punkte

Die eigentliche Mandelbrotmenge lässt sich in einer endlichen Zahl von Rechenschritten nur annähernd bestimmen. Genaue Berechnungen sind nur an bestimmten Punkten möglich. Ein einfaches Beispiel ist die reelle Achse. Beginnt man mit einem Punkt auf der reellen Achse, so wird der Imaginärteil bei der Iteration immer Null bleiben und die komplexe wird zu einer einfachen quadratischen Funktion. Für die reelle Achse lässt sich zum Beispiel jetzt genau der Bereich der Gefangenenmenge, also auch die zur Mandelbrotmenge gehörigen Punkte c_1 und c_2 (siehe Abb. 6), berechnen. Dazu verwendet man die graphische Iteration. Die Bahn eines Punktes einer quadratischen Iteration (siehe Anhang III) $z^2+c = z$ verläuft unter zwei Bedingungen in einem bestimmten Bereich und strebt nicht ins Unendliche: Die Parabel muss in einem Koordinatensystem die Winkelhalbierende $f(x)=z$ schneiden und ihr Scheitelpunkt darf nicht außerhalb des Einheitsquadrates, das vom Schnittpunkt der Parabel mit der Winkelhalbierenden bestimmt wird, liegen.

Die Bedingung für mindestens einen Schnittpunkt zwischen Parabel und Gerade ergibt sich durch Gleichsetzen der beiden Gleichungen zu

$$z^2 + c = z \quad \text{mit der Lösung} \quad z = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$$

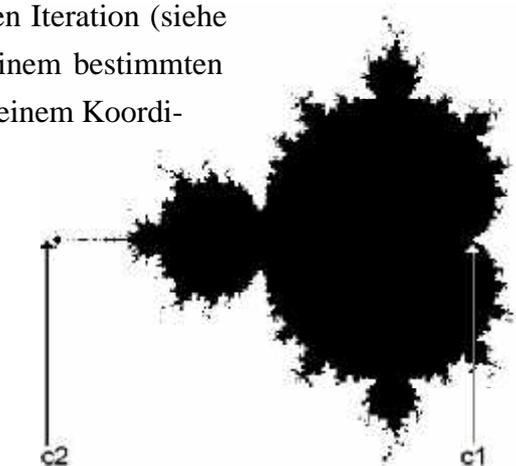


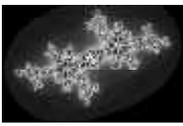
Abb. 6: Stellen der Mandelbrotmenge auf der reellen Achse

Damit muss $c_1 \leq \frac{1}{4}$ und die erste Grenze des gesuchten Intervalls sein.

Der zweite Grenzfall ergibt sich, wenn der Scheitelpunkt c der Parabel das Einheitsquadrat berührt, dessen negative Grenze bei $-z$ liegt. Daraus folgt

$$c = -\frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}$$

Durch Umformen bekommt man die Lösungen $c_{2,1} = 0$ und $c_{2,2} = -2$, wobei nur $c_{2,2} = -2$ eine Lösung der ursprünglichen Gleichung darstellt (die Lösung $c_{2,1}$ ergibt sich durch das Quadrieren). Die Intervallgrenzen sind damit $c_2 = -2$ und $c_1 = \frac{1}{4}$. Nur diese beiden Punkte gehören tatsächlich zur Mandelbrotmenge, die innerhalb des Intervalls $[-2, \frac{1}{4}]$ liegenden Punkte gehören zur Gefangenenmenge. [2]



Auf die gleiche Weise lassen sich weitere Punkte der Mandelbrotmengen berechnen. Über die Dreiecks-gleichung für komplexe Zahlen ist zum Beispiel zu beweisen, dass Julia- und Mandelbrotmengen in der Einkreisung $|c| \leq 2$ liegen müssen und dieser Wert so eine geeignete Grenze bei der Visualisierung dar-stellen.

3. Programme

Um die Entstehung der Julia- und Mandelbrotmengen nachzuvollziehen, eigene Bilder zu erzeugen und Eigenschaften nachzuweisen, haben wir einige Visual-Basic Programme geschrieben. Auch wenn VB eher ungeeignet ist und andere Programme wie Mathematica um einiges schneller wären, lässt sich VB schnell und einfach programmieren und die Grafikausgabe ist sehr einfach. Die Funktionen der drei wichtigsten Programme werden im Folgenden erläutert (s.a. Readme-Dateien auf der CD). Es ist zu beachten, dass alle Programme komplexe Zahlen ausschließlich mit kartesischen Koordinaten behan-deln, weil die Bildschirmausgabe einfacher ist und man so ein ständiges zeitaufwändiges Umrechnen in Polarkoordinaten vermeidet.

3.1 Juliamengen

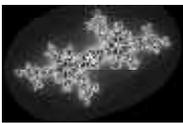
Mit diesem Programm können Julia- und Mandelbrotmengen dargestellt und beliebige Ausschnitts-vergrößerungen gewählt werden. In der ausführbaren Datei können nur quadratische Mandelbrotmengen errechnet werden, allerdings ist im Quelltext auch Code vorhanden, um Mandelbrotmengen höheren Grades und zweiter Wurzel zu berechnen. Es sind auch verschiedene Farbdarstellungen möglich. Die Daten werden direkt in eine Bitmap-Datei geschrieben, um langwierige Zeichenprozesse zu vermeiden. Daher kann das Anzeigen des Bildes eine Weile dauern.

3.2 Rückwärtsiteration

Das Programm zeigt, wie die Rückwärtsiteration (siehe Kapitel 2.5.1) bei Juliamengen funktioniert. Die Punkte, mit denen der Algorithmus arbeiten soll, werden in ein Datenfeld geschrieben. Bei jeder Iteration werden nun die markierten Punkte neu berechnet und erneut in das Datenfeld geschrieben. Nach der gewünschten Anzahl Iterationen wird das Ergebnis im Bildfeld ausgegeben. Als Startpunkte stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung. Der Text ermöglicht es die Veränderungen - Stauchungen, Drehungen, Spiegelungen - im Laufe der Iteration zu verfolgen. Im anderen Fall werden ein oder zwei abstoßende Fixpunkte berechnet, die bereits zur Juliamenge gehören und mit weniger Rechenaufwand zum gleichen Ergebnis führen. Durch das ständige Auslesen der kompletten Datenfelder arbeitet der Algorithmus sehr ineffektiv und langsam, aber um das Prinzip zu zeigen, genügt es.

3.3 Perioden

Mit diesem Programm ist die Darstellung der Perioden der Punkte in der Mandelbrotmenge entlang der reellen Achse und für alle komplexen Werte möglich. Die Werte der reellen Achse ergeben das bekannte Feigenbaumdiagramm (siehe Kap. 2.3).



4. Eigene Ergebnisse

4.1 Variationen der Mandelbrotmenge

Mandelbrotmengen M lassen sich auf zwei Arten variieren. Bei der ersten kann man die Konstante z variieren und erhält deformierte Varianten des Apfelmännchens. Erhöht man den Betrag des Realteiles der Konstante, so ist das Apfelmännchen vom "Bauch" ausgehend deformiert und nicht mehr zusammenhängend (siehe Abb. 7, CD). Wird der Betrag des Imaginärteiles erhöht, geht die Deformation von der Spitze aus (siehe Abb. 8, CD). Die zweite Möglichkeit ist, den Grad von z zu verändern. Der Algorithmus bleibt der gleiche, die Iterationsvorschrift lautet dann aber z.B. für z^3 :

$$x_{\text{neu}} = x_{\text{alt}}^3 - 3 \cdot x_{\text{alt}} \cdot y_{\text{alt}}^2 + c$$

$$y_{\text{neu}} = 3 \cdot x_{\text{alt}}^2 \cdot y_{\text{alt}} - y_{\text{alt}}^3 + ci$$

Für $z^{1.5}$ wird aus den Ergebnissen von z^3 anschließend noch die Quadratwurzel gezogen.

Bei ungeraden Funktionen ist M spiegelsymmetrisch zu beiden Achsen, bei geraden hingegen nur zur reellen Achse (siehe Abb. 9, CD). Je nach Grad haben die Fraktale sternförmig angeordnete Apfelmännchen-ähnliche Strukturen, wobei deren Anzahl um eins niedriger ist als der Grad der Funktion. Die Anzahl der "Antennen" ist dabei gleich der Anzahl der Apfelmännchen-ähnlichen Strukturen.

Bei rationalen Exponenten (siehe Abb. 10, CD) scheint M eine Mischung aus den beiden Mandelbrotmengen der benachbarten natürlichen Exponenten zu sein. Die Form von M befindet sich beim Grad 1,5 ($z = z^{1.5} + c$) im Übergang vom Kreis ($z = z + c$) zum Apfelmännchen ($z = z^2 + c$). Während die Grundform noch relativ kompakt ist, sind am Bauch schon die ersten typischen Einbuchtungen und einige Abschnürungen zu erkennen. (verwendetes Programm: Juliamengen)



Abb. 7: Mandelbrotmenge mit Konstante $c = (0,6 + 0i)$ (Farbbild auf CD)

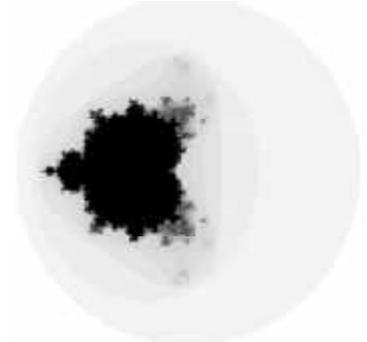


Abb. 8: Mandelbrotmenge mit Konstante $c = (0 + 0,7i)$ (Farbbild auf CD)

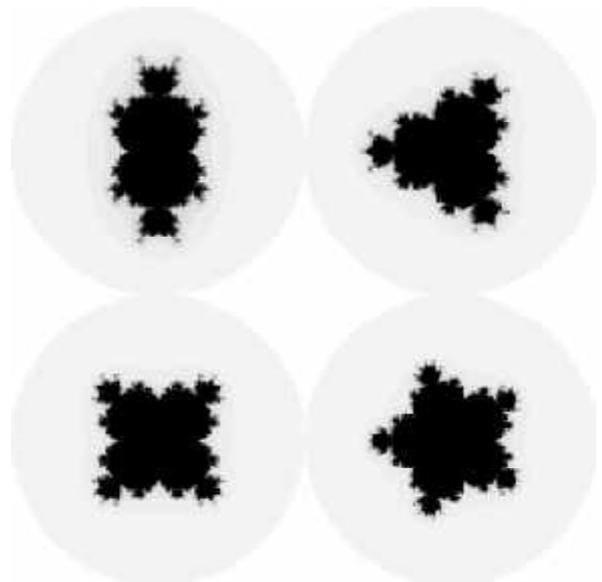


Abb. 9: Mandelbrotmengen von Funktionen höheren Grades (Farbbild auf CD)

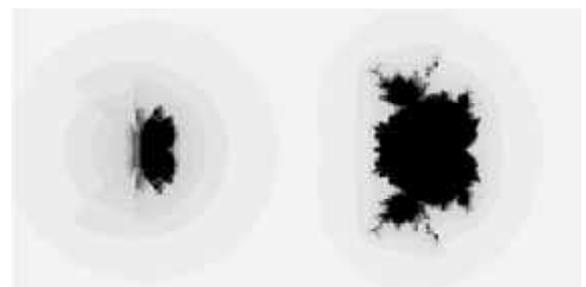
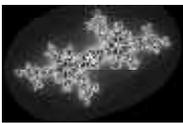


Abb. 10: Mandelbrotmengen von Funktionen mit gebrochenem Exponenten (Farbbild auf CD)



4.2 Variationen der Juliamengen

Bei Juliamengen ist es interessant, den Grad der Funktion zu variieren. Man bemerkt schnell, dass die Anzahl der radial angeordneten Formen dem Wert des Grades entspricht. Für unsere Untersuchungen haben wir uns auf Juliamengen mit Realteil gleich Null und positivem Imaginärteil konzentriert, um Vergleichsmöglichkeiten zu schaffen. Wie bei den Mandelbrotmengen kann man zwischen geraden und ungeraden Funktionen unterscheiden. Die geraden Funktionen (siehe Abb. 11, CD) erzeugen punkt-



Abb. 11: Juliamengen von geraden Funktionen höheren Grades (von links: Grad 2, 4, 6) (Farbbild auf CD)

symmetrische Juliamengen; beim Grad 2 zweigt an jedem Knotenpunkt nur eine Knospe ab, während bei den beiden weiteren geraden Funktionen jeweils zwei Knospen abzweigen. Interessant ist auch die Drehrichtung der spiralförmigen Struktur an diesen Stellen. Diese ist bei den Graden 4 und 6 entgegengesetzt.

Die ungeraden Funktionen (siehe Abb. 12, CD) erzeugen achsensymmetrische Juliamengen und unterscheiden sich nicht nur von den geraden Funktionen, sondern auch untereinander. Beim Grad 3 ist eine zentrale Knospe zu erkennen, von der drei weitere Knospen abzweigen während beim Grad 5 keine Hauptknospe zu erkennen ist. Auch bei Veränderung des Parameters c treten keine Abschnürungen auf.

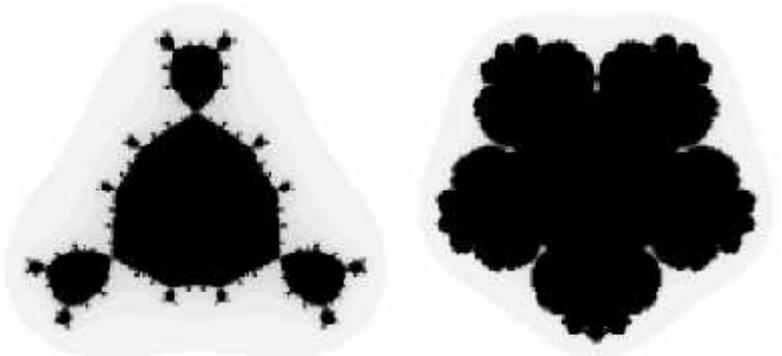


Abb. 12: Juliamengen von ungeraden Funktionen höheren Grades (links: Grad 3, rechts: Grad 5) (Farbbild auf CD)

Die Funktionen mit rationalen Exponenten (siehe Abb. 13, CD) besitzen weder Symmetrien, eine zentrale Knospe noch Abschnürungen. Die radial angeordneten Formen sind gegen den Uhrzeigersinn spiralförmig eingedreht und ihre Anzahl entspricht dem doppelten Grad der Funktion. (verwendetes Programm: Juliamengen)

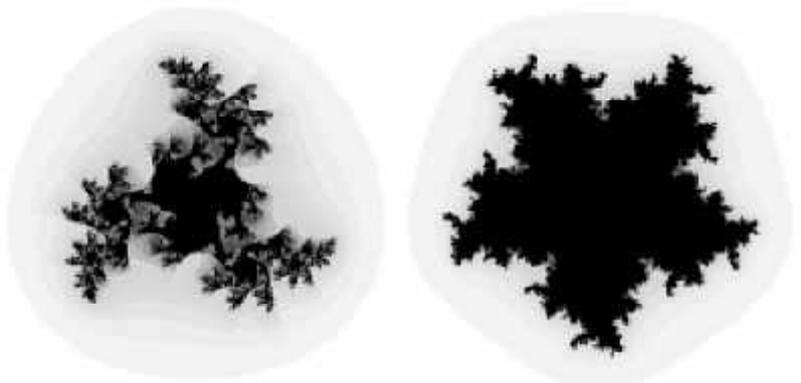
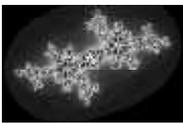


Abb. 13: Juliamengen von Funktionen mit gebrochenem Exponenten (links: Grad 1,5; rechts: Grad 2,5) (Farbbild auf CD)



4.3 Zusammenhänge zwischen Mandelbrot- und Juliamengen

Um die Zusammenhänge zwischen Julia- und Mandelbrotmengen zu zeigen haben wir entlang der Mandelbrotmenge Punkte ausgewählt (siehe Abb. 14, CD) und die zugehörigen Juliamengen berechnet (siehe Abb. 15, 16, CD). Die Punkte A bis H liegen an den Abzweigungspunkten der "Antennen" der sekundären Mandelbrotmengen. Die zugehörigen Juliamengen sind jeweils darunter abgebildet.

Die vom Bauch des Apfelmännchens abzweigende Knospe D besitzt nur zwei "Antennen". Die Anzahl der "Antennen" nimmt in Richtung positiver reeller Achse mit jeder Knospe um eins zu. Knospe C hat somit drei "Antennen", Knospe B vier und Knospe A fünf. Auch in Richtung "Hals" nimmt diese Anzahl zu, siehe Knospe E und F. Der Kopf verhält sich in dieser Beziehung genau so wie der Bauch. Von Knospe G mit zwei "Antennen" ausgehend nimmt die Anzahl in beiden Richtungen zu. An der Spitze des Apfelmännchens ist dagegen nur eine "Antenne", die Spitze selber, zu finden. Die zugehörigen Juliamengen besitzen genauso

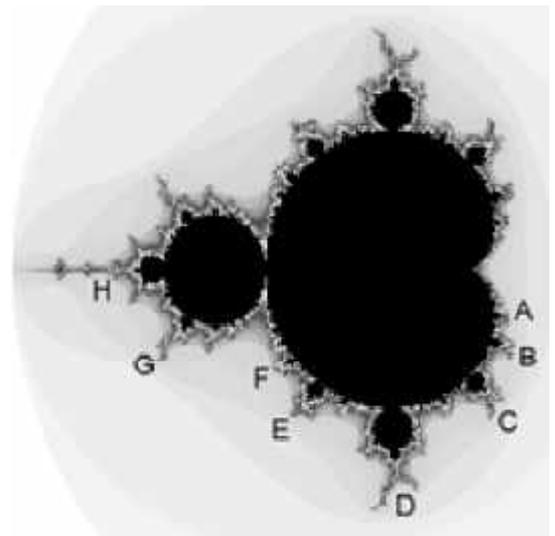


Abb. 14: Mandelbrotmenge (Farbbild auf CD)

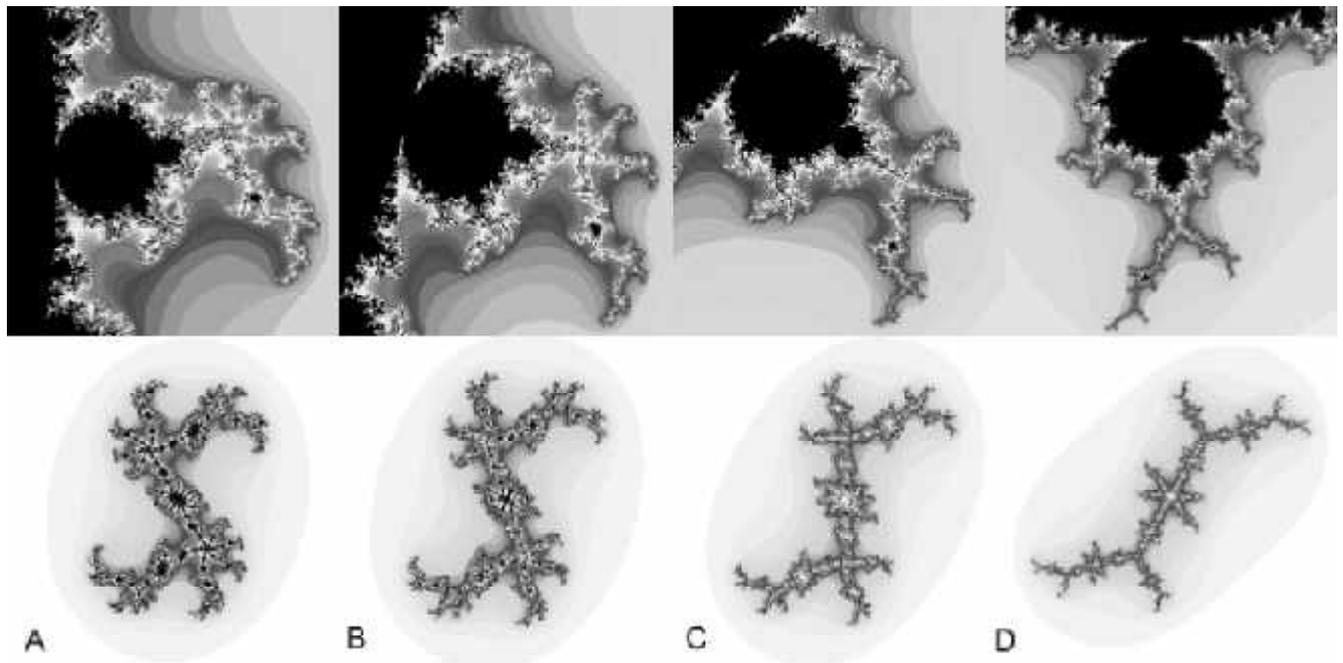


Abb. 15: Ausschnittsvergrößerungen und Juliamengen zu den Punkten A-D (siehe Abb. 14) (Farbbild auf CD)

viele Abzweigungen, wie die Mandelbrotmenge in der Nähe des Punktes "Antennen" hat. Auch in der Form ähneln sich beide stark. Ausgehend von der Stelle 0,25 auf der reellen Achse entlang der Mandelbrotmenge bis zur Spitze dreht sich die Juliamenge - gut zu sehen an den größeren "Einkreisungen" - aus der Senkrechten im Uhrzeigersinn bis zur Waagerechten. Dabei verschwindet die "gefaltete" Form und die Juliamenge wird zunehmend lang gezogen.

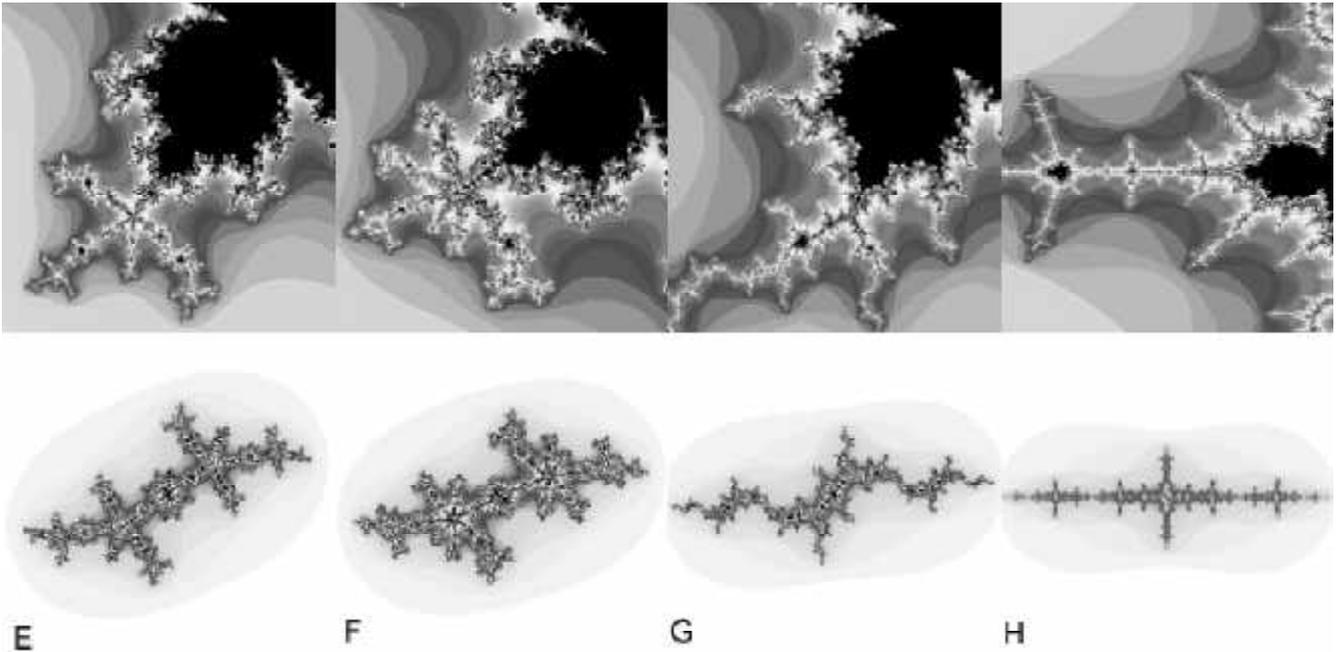
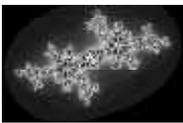


Abb. 16: Ausschnittsvergrößerungen und Juliamengen zu den Punkten E-H (siehe Abb. 14) (Farbbild auf CD)

4.4 Selbstähnlichkeit

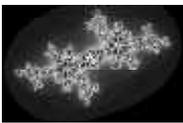
Um die Selbstähnlichkeit zu zeigen, gibt es mehrere Möglichkeiten. Neben der Darstellung Apfelmännchen-ähnlicher Formen in verschiedenen Vergrößerungen kann man auch die Rückwärtsiteration verwenden. In diesem Fall wird bei jeder Iteration die Anzahl der Abbildungen des Wortes „Julia“ verdoppelt, das aber - wenn auch verzerrt - immer vorhanden bleibt (siehe Abb. 17, CD). Folglich muss die gesamte Juliamenge letztendlich aus dem ursprünglichen Wort bestehen, was bedeutet, dass sie an jedem beliebigen Punkt eben diese Struktur haben muss und somit überall ähnlich ist. Eine weitere wichtige Beobachtung ist, dass man die Rückwärtsiteration auch mit jedem beliebigen Ausschnitt der Juliamenge beginnen kann, auch wenn dieser Ausschnitt nur ein Punkt ist. Dieser Punkt wird nach und nach die ganze Juliamenge ausfüllen, er muss also bereits alle Informationen über die Juliamenge enthalten. (verwendetes Programm: Rückwärtsiteration)

4.5 Perioden

Trägt man die Werte der Iteration der reellen Punkte gegen die Punkte der reellen Achse auf, so erhält man das Feigenbaumdiagramm (siehe Abb. 18). Es zeigt eindeutig die Tatsache, dass es neben berechenbaren Zonen des Apfelmännchens auch chaotische Bereiche gibt, und dass diese zunehmen, je weiter man in den negativen Bereich der reellen Achse kommt.



Abb. 17: Schritte 0 - 4, 7, 10, 40 der Rückwärtsiteration mit Konstante $c = (-0,45 + 0,2i)$ (Einzelbilder auf CD)



Unsere zweite Darstellung (siehe Abb. 19, CD) zeigt die Perioden des gesamten Apfelmännchens, wobei der Bauch die Periode 1 hat. Geht man von hier aus in Richtung Spitze (Knospe A), so verdoppelt sich die Periode mit jeder Knospe. Damit haben die Knospen entlang der reellen Achse die Perioden 1, 2, 4, 8, ... Geht man von einer Knospe zu einer von ihr seitlich abzweigenden, so ist deren Periode das Dreifache der ursprünglichen.

Die wichtigsten vom Bauch abzweigenden Knospen haben folgende Perioden: $P_A = 2$, $P_B = 3$, $P_C = 4$, $P_D = 5$; d.h. diese Perioden ergeben sich, indem man die Periode des Bauches (also 1) mit entsprechenden, von der Lage und Größe der Knospe abhängigen, Werten multipliziert.

Kennt man die Periode einer beliebigen Knospe und die Perioden der vom Bauch abzweigenden, so ist durch multiplizieren der entsprechenden Werte (Ähnlichkeit aller Apfelmännchenkopien zum gesamten Fraktal) das Bestimmen aller weiteren Perioden möglich. Wie schon erwähnt hat Knospe B die Periode drei. Geht man von hier aus eine Knospe weiter in Richtung der Spitze dieser Knospe (Knospe B), so muss man die aktuelle Periode verdoppeln und erhält damit die Periode der neuen Knospe.

Aus dieser Entwicklung der Perioden wäre zu folgern, dass es neben der reellen Achse auch weitere Linien geben muss, auf denen Feigenbaum-ähnliche Diagramme entstehen müssen. Dies werden wir noch näher untersuchen müssen.

5. Schluss

Es ist uns gelungen, einige Eigenschaften der Julia- und Mandelbrotmengen selber zu zeigen; aber wir mussten feststellen, dass einige Bereiche dieses immer noch aktuellen Forschungsgebietes für uns (bislang) nicht zu bearbeiten sind, weil dafür erheblich tiefgehendere mathematische Kenntnisse notwendig wären, als wir sie uns haben bislang aneignen können. Der Hauptteil unserer Arbeit bestand darin, die Grundlagen für das Verständnis weiterführender Texte zu schaffen, um über populärwissenschaftliche Literatur hinauszukommen.

Die Motivation und die Idee für unsere Arbeit war die berauschte Schönheit der Fraktale, die wir selber erzeugen und mathematisch begreifen wollten. Aber jetzt ist uns klar, wie viel mehr als nur bunte Bilder in ihnen steckt. Das schöne an der fraktalen Geometrie ist, dass sie für jedermann etwas bietet - sowohl für Schüler als auch Professoren - und dass sie auch für uns in Zukunft noch genug Möglichkeiten weiterzuarbeiten bereitstellt.

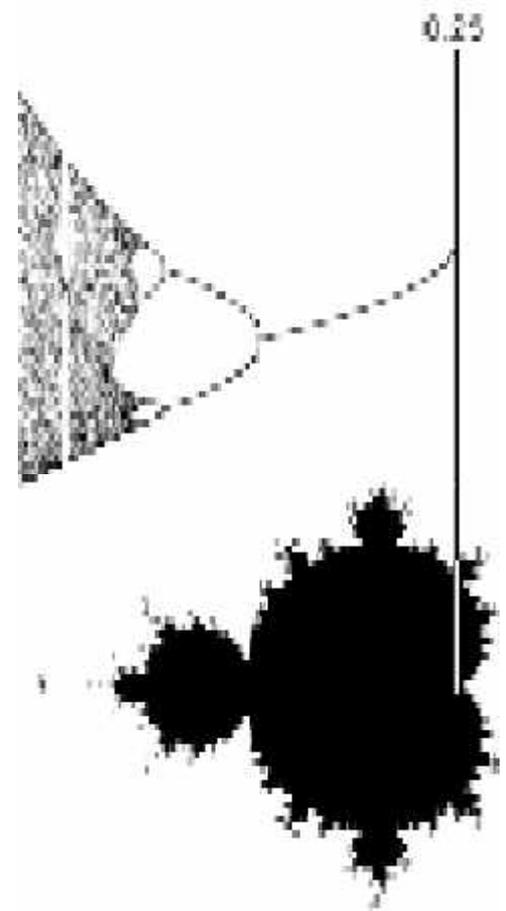


Abb. 18: Mandelbrotmenge mit zugehörigem Feigenbaumdiagramm

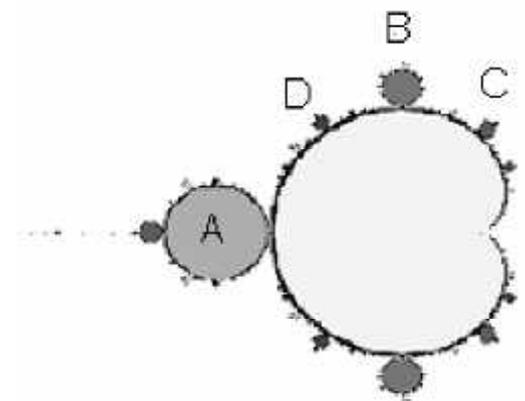
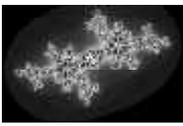


Abb. 19: Perioden des Apfelmännchens (Farbbild auf CD)

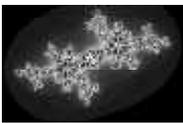


Quellen

- [1] www.uni-koblenz.de/~odsbcg/baeume97/bdynam.htm
- [2] Peitgen, Chaos: Bausteine der Ordnung, Klett-Cotta/Springer-Verlag, Stuttgart 1994
- [3] de.wikipedia.org/wiki/Systemeigenschaften
- [4] www.fractalcenter.de/definition.php
- [5] www-gs.informatik.tu-cottbus.de/~wwwgs/cg2_v10a.doc
- [6] <http://home.t-online.de/home/alexander.scherle/frg.html>
- [7] http://www-gs.informatik.tu-cottbus.de/~wwwgs/cg2_v10a.doc
- [8] www.formel-sammlung.de/wiki_Mandelbrot-Menge.html
- [9] Shishikura, The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets, SUNY Stony Brook, Institute for Mathematical sciences
- [10] www.koopiworld.de/pub/komplex.htm
- [11] exp1.fkp.physik.tu-darmstadt.de/ arbeitsgebiete/intermittenz.html

Danksagung

Als allererstes wollen wir unserem Betreuungslehrer Thomas Biedermann ganz herzlich danken, der uns immer wieder aufgebaut und ermuntert hat, und mit dem wir, ganz nebenbei bemerkt, eine Menge Spaß hatten ☺. Dann gilt unser Dank noch Andreas Sens, der uns mit Literatur und Rat stets zur Seite stand und natürlich Susanne Biedermann für jegliche Verpflegung. Den Autoren des Buches "Chaos - Bausteine der Ordnung" gilt unser ganz besonderer Dank. Ohne dieses phantastische - wenn auch manchmal etwas komplizierte - Buch wären wir der Verzweiflung weitaus häufiger nahe gewesen ☺.



Anhang

I Komplexe Wurzel mit Kartesischen Koordinaten

Wir wollen die Wurzel z der komplexen Zahl $w = c + ci$ bestimmen, w lässt sich also wie folgt schreiben,

$$z = \sqrt{w}$$

$$z^2 = w$$

$$z = x + yi$$

$$w = (x + yi)^2$$

was nach Auflösen für den Imaginärteil

$$ci = 2xy$$

und für y

$$y = \frac{ci}{2x}$$

ergibt.

Setzt man dieses Ergebnis in die Gleichung für den Realteil ein, so erhält man

$$c = x^2 - \frac{ci^2}{4x^2}$$

$$x^4 - cx^2 - \frac{ci^2}{4} = 0$$

$$x^2 = \frac{c + \sqrt{c^2 + ci^2}}{2}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{c + \sqrt{c^2 + ci^2}}$$

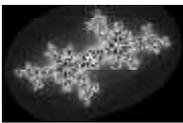
Da diese Formel aber für den Fall, dass ci so klein ist, dass der Computer auf Null rundet, Null ergibt, tritt in der Formel für y Division durch Null auf. Deshalb braucht man für den Fall, dass c negativ ist, eine zweite Formel, die wie oben hergeleitet. [2]

II Lösen einer komplexen Quadratischen Gleichung

Zu lösen ist die komplexe quadratische Gleichung $z^2 - z + c = 0$ mit $c = -0,5 + 0,5i$. Eingesetzt in die p-q-Lösungsformel für die allgemeine Form ergibt sich

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-0,5 + 0,5i)}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3 - 2i}}{2}$$



Die komplexe Wurzel $\sqrt{3-2i}$ ergibt nach der Formel aus Kap. 2.1

$$x = \sqrt{\frac{c + \sqrt{c^2 + ci^2}}{2}}$$

$$x = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}}$$

$$x \approx 1,817$$

$$y = \frac{ci}{2x}$$

$$y \approx -0,550$$

$$\sqrt{3-2i} \approx \pm(1,817 - 0,550i)$$

Dieses Ergebnis für $z_{1,2}$ eingesetzt ergibt:

$$z_1 \approx 1,408 - 0,275i$$

$$z_2 \approx -0,408 + 0,275i$$

[2]

III Graphische Iteration

Die graphische Iteration ist eine Möglichkeit die Entwicklung einer Zahlenfolge darzustellen. Dabei wird in einem Koordinatensystem (siehe Abb. 20) mit Funktionsgraph und Winkelhalbierender (die reflexive Gerade: $y = x$) vom Startwert $z_0 = -1,5$ ausgehend eine Senkrechte zum Graphen und eine waagerechte zur reflexiven Gerade gezeichnet. Diese liefert einen neuen Wert (hier $z_1 = 0,75$), der auf dieselbe Weise iteriert werden kann.

Abbildung 21 zeigt drei Graphen der Funktion $f(x) = z^2+c$, wobei c drei verschiedene Werte angenommen hat. In der Tabelle 1 sind die zugehörigen Iterationsverläufe für die ersten fünf Iterierten mit dem Startwert $z_0 = 0$ dargestellt.

Im ersten Fall ist $c = 0,5$ und die Parabel und die Winkelhalbierende schneiden sich nicht. Hier werden die Iterierten für einige Startwerte ganz eindeutig mit jeder Iteration größer und streben gegen unendlich. Für den zweiten Wert $c = -1,5$ ist in der Abbildung das zugehörige Einheitsquadrat eingezeichnet, in dem die

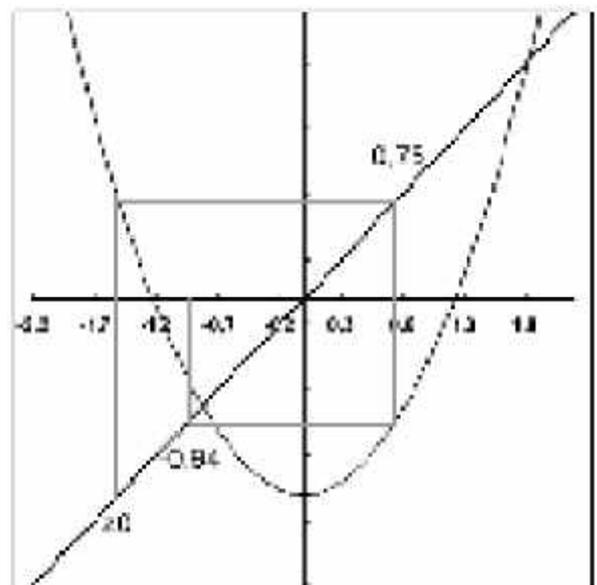


Abb. 20: Graphische Iteration des Punktes $z_0 = -1,5$

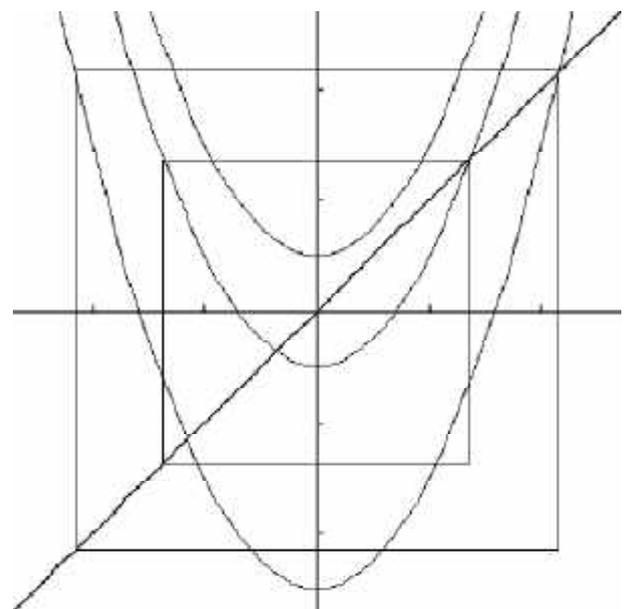
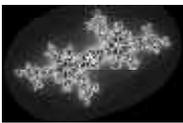


Abb. 21: Die drei Möglichkeiten für den Verlauf der Parabel und die Positionen der Einheitsquadrate



Werte unabhängig vom Startwert immer bleiben müssen, da jeder Punkt auf dem Graphen im Einheitsquadrat zu einem Punkt auf der Winkelhalbierenden im Einheitsquadrat führt und umgekehrt. Im dritten Fall streben die Iterierten sogar sehr schnell gegen unendlich, weil der Graph das Einheitsquadrat durchbricht und jeder Punkt, der den Graphen hier trifft, divergiert.

Konstante c	-2,5	-1,5	0,5
0	0,00	0,000	0,000
1	-2,50	-1,500	0,500
2	3,75	0,750	0,750
3	11,56	-0,938	1,063
4	131,19	-0,621	1,629
5	17208,69	-1,114	3,153
6	296138839,47	-0,258	10,444

Tab. 1: Werte der Iteration für $z_0 = -2,5; -1,5; +0,5$

IV Dimensionsbestimmung der Kochkurve

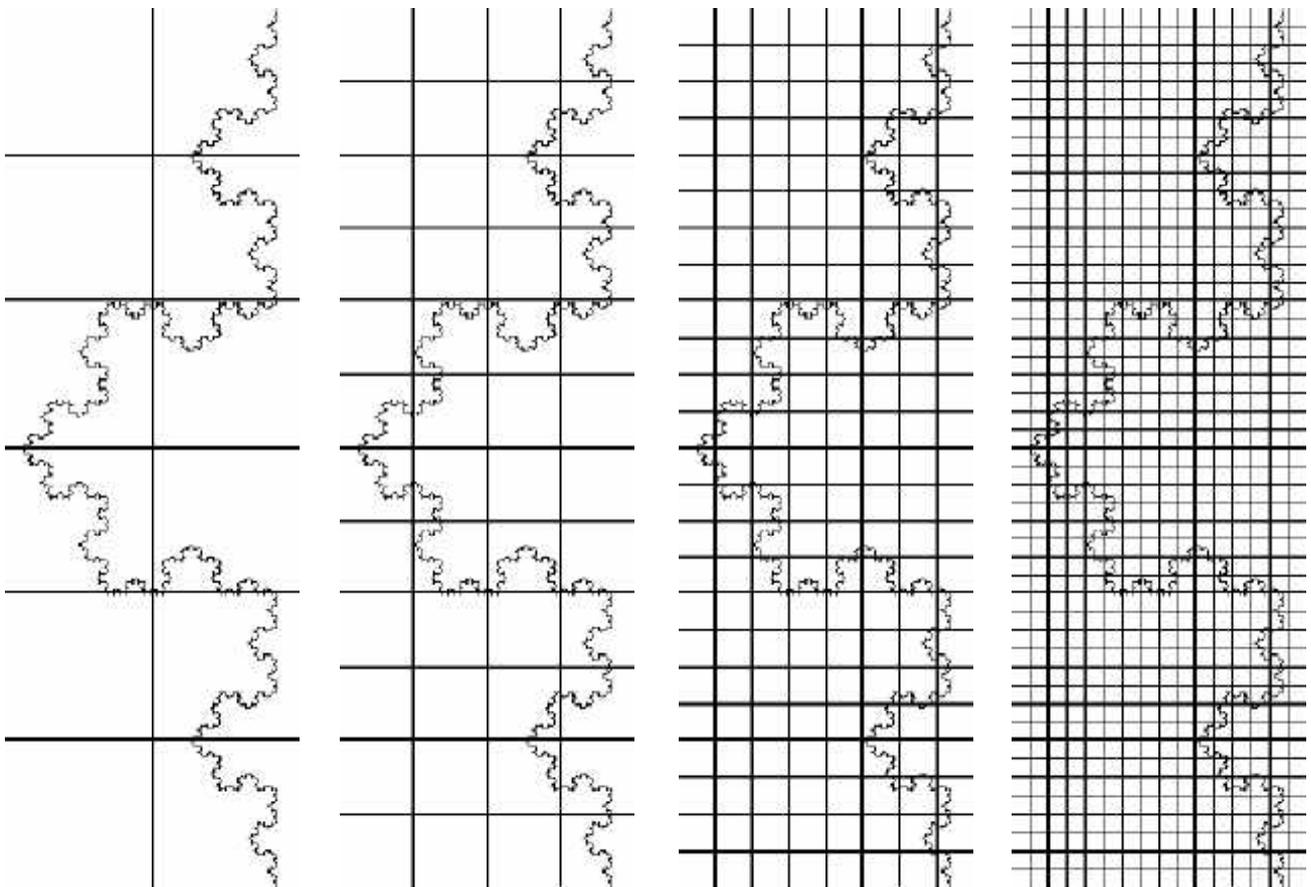
Seitenlängen des Gitters:

8 Skt

4 Skt

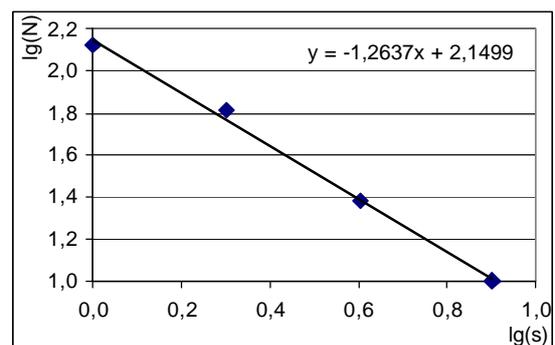
2 Skt

1 Skt



Seitenlänge s	Anzahl N	lg(s)	lg(N)
8	10	0,90309	1,00000
4	24	0,60206	1,38021
2	65	0,30103	1,81291
1	133	0,00000	2,12385

Ergebnisse der Auszählung



Graphische Darstellung der Tabelle mit Trendlinie und deren Funktionsterm